НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ
МІНІСТЕРСТВА ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

ВОЛІНА Тетяна Миколаївна

УДК 514.758:531.36

ДИСЕРТАЦІЯ
ГЕОМЕТРО-КІНЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ РУХУ ЧАСТИНОК ПО ПОВЕРХНЯХ ПІД ДІЄЮ ПРИКЛАДЕНИХ СИЛ

Спеціальність: 05.01.01 – Прикладна геометрія, інженерна графіка

Подається на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело.

_______________ Т.М. Воліна

Науковий консультант:
доктор технічних наук, професор
ПИЛИПАКА Сергій Федорович

Київ – 2025

АНОТАЦІЯ

Воліна Т. М. Геометро-кінематичні методи визначення параметрів руху частинок по поверхнях під дією прикладених сил. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук зі спеціальності 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка» (технічні науки). – Національний університет біоресурсів і природокористування, Київ, 2025.

Дисертація присвячена розробці геометро-кінематичних методів визначення параметрів руху частинок по поверхнях.

Розділ механіки, в якому вивчається рух частинки під дією прикладених сил, називається динамікою частинки. Зустрічається також термін «матеріальна точка». Взагалі по поверхнях рухаються фізичні тіла, які мають форму, розміри, об’єм, масу. При русі по поверхні вони можуть обертатися, внаслідок чого виникає кутове прискорення, яке практично неможливо описати через непередбачуваний характер обертання тіла. Тому для спрощення математичного опису руху тіл порівняно невеликих розмірів доцільно замінити реальні тіла абстрактними, які з перерахованих властивостей наділені тільки масою. Отже, матеріальна точка – це геометрична точка, яка має масу. Поняття «частинка» або «матеріальна частинка» в принципі аналогічне поняттю матеріальної точки. При цьому мається на увазі, що розмірами фізичного тіла можна знехтувати в умовах конкретної задачі. Також вважається, що матеріальна частинка плоска, тобто вона ковзає по поверхні без кочення і обертання.

Рух матеріальної частинки під дією прикладених сил може бути вільним (наприклад, рух краплини гербіциду під дією вітру і ваги) і обмеженим певними зв’язками (наприклад, при зустрічі частинки із поверхнею). Зв’язок називається ідеальним, коли відсутнє тертя частинки по поверхні (в такому випадку поверхня вважається абсолютно гладенькою). При наявності тертя виникає відповідна сила, яка залежить від реакції поверхні (сили тиску на неї) і коефіцієнта тертя. Для абсолютно гладенької поверхні коефіцієнт тертя рівний нулю. Оскільки абсолютно

гладенька поверхня теж є поняттям абстрактним, дослідження велися для руху частинки по шорстких поверхнях, тобто за наявності сили тертя. Сили опору повітря, які теж є перешкодою для ковзання частинки по поверхні, в дослідженнях не враховувалися.

Усі дослідження базуються на відомих законах механіки, зокрема на другому законі Ньютона, згідно якого прискорення частинці надає прикладена до неї сила. Як відомо, між прискоренням частинки при її русі по прямій лінії і кривій є суттєва різниця. При русі по прямій лінії прискорення виникає при зміні швидкості частинки, а при сталій швидкості воно відсутнє. При русі по кривій воно присутнє і при сталій швидкості, оскільки відбувається зміна вектора швидкості. Таким чином, при криволінійному русі частинки присутні дві складові прискорення: тангенціальне, спрямоване по дотичній до траєкторії і викликане зміною абсолютної величини швидкості, і доцентрове, спрямоване в сторону центра кривини траєкторії і викликане зміною вектора швидкості. В роботі розглянуто рух виключно по криволінійних траєкторіях на поверхнях і в площині. Якщо частинка ковзає по поверхні, яка сама рухається, то такий рух називається складним. В такому випадку виникає ще одна складова прискорення – Коріолісове прискорення. Зумовлене воно поворотом поверхні або площини. Якщо поверхня або площина здійснює поступальні переміщення в просторі – її лінії під час переміщення залишаються паралельними самими собі (тобто відсутній поворот), то Коріолісове прискорення відсутнє. У роботі такі випадки розглянуті на прикладі площини і циліндричної поверхні.

Теорія руху матеріальної точки по поверхні в класичній механіці наведена в загальному вигляді. Вона розглядає рух частинки по поверхні, заданій в неявному вигляді. При цьому поверхня може бути гладенькою або шорсткою. В другому випадку розв’язання задачі значно ускладнюється, оскільки з’являється сила тертя, напрям якої спрямований в протилежну сторону ковзання частинки, траєкторія якої невідома. Взагалі всі розглянуті в роботі приклади стосуються другої задачі динаміки – знаходження траєкторії руху частинки під дією відомих сил. Перша задача – визначення сил, які діють на частинку, що рухається за заданим законом руху не є складною, оскільки зводиться до диференціювання залежностей, що описують цей рух. Друга задача значно ускладнюється, оскільки зводиться до розв'язування диференціальних рівнянь другого порядку.

Для розв'язування практичних задач різними авторами застосовуються різні підходи. Оскільки поширеними поверхнями в техніці є поверхні обертання і гвинтові (стаціонарні або такі, що обертаються навколо власної осі зі сталою кутовою швидкістю), то саме на такі поверхні зорієнтована основна маса задач на знаходження траєкторії ковзання частинки по них. При цьому, як правило, використовується циліндрична система координат: положення частинки на поверхні задається відстанню до неї від осі обертання (радіусом), кутом повороту цього радіуса і відстанню від початку координат паралельно до осі обертання. Принципова відмінність нашої роботи полягає в тому, що використовуються параметричні рівняння поверхні, віднесені до криволінійних координат. Положення точки на поверхні задається двома криволінійними координатами, одна з яких може бути і прямолінійна (якщо поверхня лінійчата). Зв'язок між двома криволінійними координатами на поверхні і трьома декартовими координатами просторової системи забезпечується параметричними рівняннями поверхні. Це стосується як стаціонарних, так і рухомих поверхонь.

Якщо дві незалежні змінні поверхні, які є криволінійними координатами, зв'язати між собою певною залежністю, то на поверхні буде описана лінія. Цей зв'язок відбувається через іншу змінну – час, тобто обидві криволінійні координати є функціями часу. Ці дві залежності є невідомими і вони описують криву на поверхні у функції часу – розшукувану траєкторію ковзання частинки по ній. Такий підхід дозволяє застосувати диференціальну теорію поверхонь до знаходження всіх векторів, вздовж яких діють прикладені сили. В класичній механіці розглядається також використання неявних рівнянь поверхні. В цьому випадку для знаходження вектора нормалі до поверхні вздовж траєкторії руху частинки потрібно вводити скалярний множник. Це збільшує число диференціальних рівнянь від трьох у нашому випадку до чотирьох, серед яких цей множник і три декартові координати траєкторії у функції часу. У нашому випадку використовуються криволінійні координати, які можна зв'язувати між собою не тільки через незалежну змінну, якою виступає час, але і через натуральний параметр – довжину дуги траєкторії як для простого, так і складного руху.

При русі частинки по поверхні всі прикладені до неї сили проекціюються на просторову систему координат. Ця система може бути як нерухома, так і рухома. Прикладом рухомої системи координат може бути супровідний тригранник траєкторії руху частинки по поверхні, при цьому частинка збігається з вершиною тригранника, а незалежною змінною виступає довжина дуги траєкторії. В роботі розглянуті такі випадки на конкретних прикладах.

Рух частинки по нерухомій поверхні під дією сили власної ваги розглянуто на прикладі гвинтових поверхонь, як лінійчатих, так і з заданою кривою осьового перерізу, а також складеної поверхні, якою є гвинтовий коноїд, обмежений співвісною циліндричною поверхнею. Отримано цікавий результат для гвинтової поверхні у вигляді жолоба, дно якого є гвинтовою лінією із кутом підйому, рівному кутові тертя. Якби цей жолоб був прямолінійним (наприклад, циліндром), то частинка опускалася б на дно жолоба і після стабілізації руху рухалася б по найнижчій прямолінійній твірній зі сталою швидкістю. При русі по гвинтовому жолобу на частинку діє відцентрова сила, яка змушує її віддалятися від осі обертання, тобто підніматися дещо вище від дна жолоба, а потім знову опускатися до нього. Цей процес триває нескінченно довго, траєкторія частинки асимптотично наближається до гвинтової лінії – дна жолоба, а швидкість – до нуля.

У випадку складного руху вводиться додаткова координатна система, жорстко прив'язана до рухомої поверхні. У цій рухомій системі частинка здійснює відносний рух по поверхні. Сума відносного руху частинки і переносного руху рухомої системи координат в проекціях на нерухому систему дає абсолютну траєкторію. Якщо рух поверхні поступальний, то вводити додаткову систему координат немає сенсу. При такому русі лінії поверхні залишаються паралельними самим собі, отже і осі рухомої системи координат, жорстко прикріпленої до поверхні, теж будуть паралельними до відповідних осей нерухомої системи. В роботі розглянуто приклади поступального руху поверхні, яка здійснює колові коливання, тобто всі точки поверхні описують конгруентні кола. Слід зазначити, що в існуючих роботах ковзання частинки в коливальному русі розглядалося тільки для площини. Застосування криволінійних координат дозволило описати процес ковзання по поверхнях. Однією з таких поверхонь є циліндрична, поперечним перерізом якої є синусоїда. Якщо амплітуда синусоїди дорівнює нулю, то поверхня перетворюється у площину. Отримані результати для такого часткового випадку повністю узгоджуються із результатами інших авторів.

В інших випадках складного руху частинки за наявності повороту рухомої поверхні вводиться рухома система координат. Зазвичай, це обертальний рух, тому рухома і нерухома системи мають спільну вісь обертання. У деяких випадках (коли відомий вектор ковзання частинки по поверхні, як у відцентрових апаратах вздовж прямолінійної лопатки), можна визначити всі складові абсолютного прискорення, в тому числі і Коріолісове, в проекціях на осі рухомої системи координат без прив’язки до нерухомої. В цьому випадку потрібно визначати напрям кожної складової прискорення. При віднесенні рухомої поверхні до криволінійних координат, траєкторію ковзання частинки по ній, описану цими координатами, вважаємо відносним рухом. Переміщення рухомої поверхні по відношенню до нерухомої є переносним рухом. Сума цих двох рухів дає абсолютну траєкторію, до рівнянь якої водить дві невідомі функції – залежності двох криволінійних координат поверхні від часу. Послідовним диференціюванням абсолютної траєкторії можна отримати вирази абсолютної швидкості і прискорення, до якого входить і прискорення Коріоліса. В цьому випадку відпадає потреба визначати його напрям і величину. Застосування криволінійних координат і абсолютної траєкторії, як суми двох рухів, дали можливість прослідкувати рух частинки в похилому циліндричному жолобі під дією гвинтового коноїда, який обертається навколо власної осі. В практиці це відома задача транспортування технологічного матеріалу шнеком. Для вертикального і горизонтального шнеків характер руху частинки принципово відрізняється. В роботі вдалося з’ясувати зміну руху частинки по мірі кута нахилу шнека від вертикального до горизонтального положення.

В роботі показано ефективність застосування в ролі рухомої системи координат тригранника Френе при складному русі точки. Його жорстко закріплено на рухомій горизонтальній площині так, що орти дотичної і нормалі розташовуються в цій площині. Якщо площину обертати навколо вертикальної осі, через яку проходить орт нормалі, то вершина тригранника опише коло по відношенню до нерухомої площини, тобто тригранник Френе буде супровідним для цього кола. Положення точки в системі тригранника буде задаватися двома координатами в проекціях на орти дотичної і нормалі. Якщо ці координати сталі, то точка в системі тригранника буде нерухомою – відносний рух відсутній, а в абсолютному русі точка опише коло. Якщо на площину, що обертається, попадає частинка, то під дією відцентрової сили вона починає ковзати, тобто здійснює відносний рух в системі тригранника і абсолютний по відношенню до нерухомої системи координат. В такому випадку відносний рух частинки можна задати залежностями проекцій координат на орти тригранника у функції довжини дуги напрямного кола, тобто кола, по якому рухається вершина тригранника. Це дає можливість застосувати формули Френе, які відіграють надзвичайно велику роль у диференціальній геометрії. Не меншу роль вони відіграють і тут, оскільки дозволяють дуже просто знайти вектор абсолютного прискорення в проекціях на орти рухомого тригранника, включаючи і прискорення Коріоліса. Особливістю такого підходу є те, що для знаходження відносного руху частинки використовується тільки одна координатна система – супровідний тригранник Френе напрямного кола, тобто траєкторії переносного руху. В роботі показано, що переносною траєкторією може бути будь-яка крива, задана рівняннями у функції довжини дуги. Це розширює можливості розв’язання задач складного руху точки не тільки при обертальному русі поверхні, а і при поєднанні обертального і поступального переміщень. У якості прикладу в роботі розглянуто знаходження траєкторії ковзання частинки по стичній площині тригранника Френе, для якого траєкторією переносного руху є ланцюгова лінія. Практична інтерпретація цієї задачі – знаходження траєкторії ковзання вантажу в кузові вантажного автомобіля, який здійснює поворот по дорозі зі змінною кривиною її осі.

Ключові слова: частинка, поверхня, ковзання, складний рух, відносна і абсолютна траєкторії, диференціальні рівняння.

ABSTRACT

Volina T. M. Geometric-kinematic methods for determining the parameters of particle motion on surfaces under the action of applied forces. – Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The dissertation on competition for a scientific degree of doctor of technical sciences, specialty 05.01.01 Applied geometry, engineering graphics (technical sciences). National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine, Kyiv, 2024.

The dissertation focuses on developing geometric-kinematic methods for determining the parameters of particle motion on surfaces.

Particle dynamics, a branch of mechanics, studies the motion of particles under applied forces. The term “material point” is commonly used in this context. Generally, physical bodies moving on surfaces possess shape, size, volume, and mass. However, their rotation during motion can lead to angular acceleration, which is challenging to describe due to its unpredictable nature. To simplify the mathematical description of the motion of small bodies, it is common to substitute real bodies with abstract entities possessing only mass. Thus, a material point is defined as a geometric point with mass. The terms “particle” or “material particle” are conceptually similar to “material point” assuming the dimensions of the physical body can be ignored for the specific problem at hand. Moreover, a material particle is considered flat, sliding on a surface without rolling or rotating.

A material particle’s motion under applied forces can either be free (e.g., an herbicide droplet moving under wind and gravity) or constrained by specific conditions (e.g., encountering a surface). An ideal connection occurs when there is no friction between the particle and the surface, which is then considered perfectly smooth. If friction exists, it generates a force dependent on the surface’s reaction (pressure force) and the coefficient of friction. For an ideal surface, the coefficient of friction is zero. Since a

perfectly smooth surface is theoretical, research instead focuses on particle motion on rough surfaces, where frictional forces are present. The study excludes air resistance forces, which can also impede particle sliding.

The research builds on established mechanics principles, particularly Newton's second law, which states that a particle's acceleration results from the applied force. A notable distinction exists between a particle's acceleration along a straight line versus a curve. For straight-line motion, acceleration only occurs when the velocity changes; it is absent if the velocity is constant. Acceleration exists even with constant velocity for curved motion, due to changes in the velocity vector. Consequently, curvilinear motion involves two acceleration components: tangential (along the tangent, caused by velocity changes) and centripetal (toward the center of curvature, caused by velocity vector changes). The study focuses exclusively on motion along curved trajectories on surfaces and planes. When a particle slides on a moving surface, its motion is classified as a compound. This introduces Coriolis acceleration, caused by the surface's rotation. If the surface moves translationally, maintaining parallel lines (i.e., no rotation), Coriolis acceleration is absent. The study examines such cases using planar and cylindrical surface examples.

The theory of the motion of a material point on a surface in classical mechanics is presented in general form. It considers the motion of a particle on a surface defined implicitly. The surface may be either smooth or rough. In the second case, solving the problem becomes significantly more complex due to the presence of frictional force. This force is directed opposite to the particle's sliding motion, and the trajectory of the particle is unknown. In general, all the examples considered in the work pertain to the second problem of dynamics – determining the trajectory of a particle's motion under the influence of known forces. The first problem – determining the forces acting on a particle moving according to a given law of motion – is not as challenging, as it reduces to differentiating the relationships that describe this motion. The second problem is considerably more complicated since it involves solving second-order differential equations.

Different approaches address practical problems involving particle motion. Engineering applications often involve rotational and helical surfaces, stationary or rotating about an axis at a constant angular velocity. Tasks related to particle trajectory on these surfaces frequently use cylindrical coordinates, defining position via the distance from the rotation axis (radius), the rotation angle, and the distance parallel to the axis. The fundamental difference of our work lies in the use of parametric equations of the surface related to curvilinear coordinates. A point on the surface is defined by two curvilinear coordinates, one of which may be linear if the surface is ruled. The parametric equations relate these curvilinear coordinates to the Cartesian coordinates of the spatial system, making the approach applicable to both stationary and moving surfaces.

When curvilinear coordinates are linked by a dependency, a line is defined on the surface. Time serves as the connecting variable, making the coordinates time-dependent functions. These dependencies, describing the particle's trajectory as a function of time, remain unknown initially. This approach applies differential surface theory to determine vectors along which forces act. Classical mechanics also addresses implicit surface equations. Finding a surface's normal vector along a particle's trajectory requires introducing a scalar multiplier, increasing the number of differential equations from three (as in this study) to four. Here, curvilinear coordinates are linked not only via time but also through the natural parameter of arc length, simplifying both simple and compound motion analysis.

All forces acting on a particle are projected onto a spatial coordinate system, which may be stationary or moving. An example of a moving coordinate system can be a trihedron accompanying the trajectory of the particle on the surface, where the particle coincides with the vertex of the trihedron, and the arc length of the trajectory serves as an independent variable. This is explored using specific examples.

The motion of a particle on a stationary surface, influenced by its weight, is analyzed using helical surfaces as examples, including both ruled surfaces and those with predefined axial cross-section curves. One notable result involves a helical surface resembling a trough, where the bottom is a helical line with a pitch angle equivalent to the angle of friction. On a straight-through, the particle would descend to the bottom and, after stabilizing, move along the lowest straight line at a constant velocity. In contrast, on a helical trough, centrifugal force causes the particle to oscillate, with its trajectory asymptotically approaching the helical line at the bottom while its velocity gradually decreases to zero.

For compound motion, an additional coordinate system fixed to the moving surface is introduced to account for the particle's relative motion. The combination of the particle's relative motion and the translational motion of the surface yields the absolute trajectory. When the surface undergoes translational motion, additional coordinate systems are unnecessary, as the surface's lines remain parallel during displacement. Examples include translational motion with circular oscillations, where all points describe congruent circles. Using curvilinear coordinates, this study describes the particle's motion on sinusoidal surfaces, including cylindrical surfaces with sinusoidal cross-sections. If the sinusoidal amplitude is zero, the surface becomes planar, yielding results consistent with existing studies.

For complex motion involving rotating surfaces, a moving coordinate system is introduced. Typically, moving and stationary systems share a rotation axis. In some cases, such as when the particle's sliding vector is known (e.g., in centrifuges along a straight blade), absolute acceleration components (including Coriolis) can be calculated in moving system projections without reference to the stationary system. When curvilinear coordinates are used to describe the motion relative to the moving surface, the trajectory of the particle sliding on it is considered as relative motion. The displacement of the moving surface relative to the stationary one is treated as translational motion. The sum of these two motions gives the absolute trajectory, described by two unknown functions – the time dependencies of the two curvilinear coordinates of the surface. Sequential differentiation provides expressions for absolute velocity and acceleration, including Coriolis acceleration, without separately determining its direction and magnitude. In this case, it is unnecessary to determine its direction and magnitude. The use of curvilinear coordinates and the absolute trajectory, as the combination of two motions, enabled the tracing of a particle's motion in an inclined cylindrical trough influenced by a helical cone rotating about its axis. In practice, this corresponds to the well-known problem of material transport using a screw conveyor. The nature of particle motion differs fundamentally between vertical and horizontal screw conveyors. The study identifies how motion changes as the screw's inclination shifts from vertical to horizontal.

The effectiveness of the Frenet frame as a moving coordinate system is demonstrated in cases of complex particle motion. The Frenet frame is rigidly attached to the moving horizontal plane so that its tangent and normal vectors lie within the plane. When the plane rotates around the vertical axis passing through the normal vector, the apex of the Frenet frame describes a circle relative to the stationary plane, meaning the frame accompanies the circular motion. The particle's position in the Frenet frame is defined by two coordinates, projected onto the tangent and normal vectors. If these coordinates remain constant, the particle is stationary within the Frenet frame (no relative motion), and in absolute motion, it describes a circle. When a particle falls onto the rotating plane, it begins to slide due to centrifugal force, undergoing relative motion in the Frenet frame and absolute motion relative to the stationary coordinate system. The relative motion of the particle is defined by the projections of its coordinates onto the Frenet frame vectors as functions of the arc length of the guiding circle, i.e., the circle along which the apex of the frame moves. This allows the application of Frenet formulas, which are essential in differential geometry. Their application here provides a straightforward method for finding the absolute acceleration vector in the projections onto the Frenet frame vectors, including Coriolis acceleration. A key feature of this approach is the use of only one coordinate system – the accompanying Frenet frame of the guiding circle – to determine the relative motion of the particle. The guiding trajectory, defined by equations as a function of arc length, need not be limited to a circular path. This flexibility expands the range of problems that can be solved, encompassing complex particle motions involving both rotational and translational displacements. As an example, the study examines the trajectory of a particle sliding on the tangent plane of a Frenet frame, where the guiding trajectory is a catenary line. This problem has practical implications, such as determining the trajectory of cargo sliding within the cargo compartment of a truck making a turn on a road with a variable curvature axis.

Key words: particle, surface, sliding, complex motion, relative and absolute trajectories, differential equations.

Список опублікованих за темою дисертації праць здобувача

Статті у наукових періодичних виданнях, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus:

1. Pylypaka S., Klendiy M., **Zaharova T.** Movement of the particle on the external surface of the cylinder, which makes the translational oscillations in horizontal planes. In: Ivanov V. et al. (eds). Advances in Design, Simulation and Manufacturing. DSMIE 2018. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 2019. P. 336–345. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-93587-4_35. *(Здобувачем розглянуто окремий випадок коливань циліндра, коли його вісь нахилена під кутом тертя до горизонтальної площини)*

2. Pylypaka S., Nesvidomin V., **Zaharova T.**, Pavlenko O., Klendiy M. The investigation of particle movement on a helical surface. In: Ivanov V. et al. (eds). Advances in Design, Simulation and Manufacturing II. DSMIE 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 2020. P. 671–681. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-22365-6_67. *(Здобувачем досліджено рух частинки для випадку, коли кут підйому нижньої гвинтової лінії жолоба дорівнює кутові тертя)*

3. Pylypaka S., **Zaharova T.**, Zalevska O., Kozlov D., Podliniaieva O. Determination of the effort for flexible strip pushing on the surface of a horizontal cylinder. In: Tonkonogyi V. et al. (eds). Advanced Manufacturing Processes. InterPartner 2019. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 2020. P. 582–590. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-40724-7_59. *(Здобувачем отримано вираз результуючої сили тиску смуги на внутрішню поверхню циліндра)*

4. Pylypaka S., Nesvidomin V., **Volina T.**, Sirykh L., Ivashyna L. Movement of the particle on the internal surface of the spherical segment rotating about a vertical axis. INMATEH – Agricultural Engineering. 2020. Vol. 62, no. 3. P. 79–86. URL:

https://doi.org/10.35633/inmateh-62-08. *(Здобувачем складено диференціальні рівняння відносного руху частинки по поверхні сферичного сегмента)*

5. Pylypaka S., **Volina T.**, Mukvich M., Efremova G., Kozlova O. Gravitational relief with spiral gutters, formed by the screw movement of the sinusoid. In: Ivanov V., Pavlenko I., Liaposhchenko O., Machado J., Edl M. (eds). Advances in Design, Simulation and Manufacturing III. DSMIE 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 2020. P. 63–73. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-50491-5_7. *(Здобувачем досліджено вплив параметрів синусоїди на характер руху частинки по гвинтовій поверхні)*

6. **Volina T.**, Pylypaka S., Rebrii A., Pavlenko O., Kremets Ya. Particle movement on concave coulter of the centrifugal distributor with radially installed vertical blades. In: Tonkonogyi V. et al. (eds). Advanced Manufacturing Processes II. InterPartner 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 2021. P. 237–246. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-68014-5_24. *(Здобувачем визначено вплив коефіцієнта тертя частинки по диску і по лопаті на її розгін до моменту сходження із диска)*

7. Pylypaka S., **Volina T.**, Hryshchenko I., Rybenko I., Sydorenko N. Dynamics of a particle on a movable wavy surface. In: Tonkonogyi V. et al. (eds). Advanced Manufacturing Processes II. InterPartner 2020. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 2021. P. 196–206. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-68014-5_20. *(Здобувачем знайдено умови, за яких траєкторія ковзання частинки по поверхні є замкненою кривою)*

8. Pylypaka S., **Volina T.**, Nesvidomin A., Zakharova I., Rebrii A. Particle movement in a centrifugal device with vertical blades. In: Ivanov V., Pavlenko I., Liaposhchenko O., Machado J., Edl M. (eds). Advances in Design, Simulation and Manufacturing IV. DSMIE 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 2021. P. 156–165. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-77823-1_16. *(Здобувачем знайдено вирази компонентів абсолютного прискорення частинки в проекціях на орти рухомого тригранника Френе)*

9. **Volina T.**, Pylypaka S., Pavlenko O., Klochko O., Hryshchenko I. The transportation of a particle by a vertical auger with a coaxial cylinder which rotate together around the common axis. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2021. 1164 012086. URL: https://doi.org/10.1088/1757-899X/1164/1/012086. *(Здобувачем знайдено умови, за яких частинка при русі по спільній лінії перетину шнека і циліндра піднімається вгору або опускається вниз)*

10. **Volina T.**, Pylypaka S., Nesvidomin V., Pavlov A., Dranovska S. The possibility to apply the Frenet trihedron and formulas for the complex movement of a point on a plane with the predefined plane displacement. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2021. Vol. 3, no. 7 (111). P. 45–50. URL: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.232446. *(Здобувачем знайдено вирази абсолютного прискорення частинки в проекціях на орти тригранника Френе при його русі вздовж кривої змінної кривини)*

11. **Volina T.**, Pylypaka S., Nesvidomin V., Rybenko I., Sierykh L. Particle movement on the external surface of the cone that rotates around the vertical axis. In: Tonkonogyi V. et al. (eds). Advanced Manufacturing Processes III. InterPartner 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 2021. P. 557–567. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-91327-4_54. *(Здобувачем розглянуто вплив висоти, з якої падає частинка на конус, на подальшу траєкторію її ковзання по його зовнішній поверхні)*

12. Pylypaka S., **Volina, T.**, Zalevska O., Semirnenko S., Hryshchenko I. Movement of a particle on the inner surface with a preset meridian. In: Tonkonogyi V. et al. (eds). Advanced Manufacturing Processes III. InterPartner 2021. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 2021. P. 535–545. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-91327-4_52. *(Здобувачем досліджено випадок, коли частинка припиняє ковзати по поверхні, тобто «залипає»)*

13. **Volina T.**, Pylypaka S., Kremets Ya., Kozlova O., Rebrii A. Organization of transportation of a particle by an inclined cylinder rotating around the axis. In: Ivanov, V., Pavlenko, I., Liaposhchenko, O., Machado, J., Edl, M. (eds). Advances in Design, Simulation and Manufacturing V. DSMIE 2022. Lecture Notes in Mechanical

Engineering. Springer, Cham. 2022. P. 55–65. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-06044-1_6. *(Здобувачем досліджено характер руху частинки по внутрішній поверхні похилого циліндра для випадку, коли кут нахилу його осі більший кута тертя)*

14. Pylypaka S., **Volina T.**, Hryshchenko I., Dieniezhnikov S., Rybenko I. Mathematical model of lifting particles of technological material by vertical auger. In: Ivanov, V., Pavlenko, I., Liaposhchenko, O., Machado, J., Edl, M. (eds). Advances in Design, Simulation and Manufacturing V. DSMIE 2022. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 2022. P. 112–122. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-06044-1_11. *(Здобувачем визначено вплив коефіцієнта тертя частинки по поверхні шнека і по поверхні кожуха на швидкість підйому частинки)*

15. **Volina T.**, Pylypaka S., Babka V., Zalevska O., Rebrii A. Sliding of a particle on the horizontal plane under oscillating and rotary movements. In: Tonkonogyi, V., Ivanov, V., Trojanowska, J., Oborskyi, G., Pavlenko, I. (eds). Advanced Manufacturing Processes IV. InterPartner 2022. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. 2023. P. 506–514. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-16651-8_48. *(Здобувачем складено диференціальні рівняння відносного руху частинки)*

16. **Volina T. M.**, Pylypaka S. F., Babka V. M. Motion of a particle on an inclined plane rotating around a vertical axis. International Applied Mechanics. 2022. Vol. 58. P. 488–496. URL: https://doi.org/10.1007/s10778-022-01174-x. *(Здобувачем досліджено характер зміни траєкторій ковзання частинки по похилій площині в залежності від кута її нахилу)*

17. **Volina T.**, Pylypaka S., Kozlova O., Rebrii A., Rybenko I. Design of the curvilinear axis of the silage pipeline. In: Ivanov, V., Pavlenko, I., Liaposhchenko, O., Machado, J., Edl, M. (eds). Advances in Design, Simulation and Manufacturing VI. DSMIE 2023. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2023. P. 115–124. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-32774-2_12. *(Здобувачем розглянуто окремий випадок, коли віссю силосопроводу є дуга кола. Показано, що в такому випадку диференціальне рівняння руху частинки має аналітичний розв'язок)*

18. **Volina T.**, Pylypaka S., Kalenyk M., Dieniezhnikov S., Nesvidomin V., Hryshchenko I., Lytvynenko Ya., Borodai A., Borodai D., Borodai Ya. Construction of

mathematical model of particle movement by an inclined screw rotating in a fixed casing. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2023. Vol. 5, no. 7 (125). P. 60–69. URL: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.288548. *(Здобувачем показано, що на відміну від горизонтального і вертикального розташування осі шнека стабілізації руху частинки при його похилій осі не відбувається)*

19. **Volina T. M.**, Pylypaka S. F. Force required to move the flexible strip up surface of horizontal cylinder. Machinery and Energetics. 2021. Vol. 12, no. 1. P. 25–29. URL: https://doi.org/10.31548/machenergy2021.01.025. *(Здобувачем визначено складову сили тертя від результуючої сили тиску смуги на поверхню циліндра)*

20. **Volina T. M.**, Pylypaka S. F. Investigation of particle movement on rotary spherical segment. Machinery and Energetics. Journal of Rural Production Research. Kyiv. Ukraine. 2021. Vol. 12, no. 2. P. 33–38. URL: https://doi.org/10.31548/machenergy2021.02.033. *(Здобувачем складено диференціальні рівняння відносного руху частинки по поверхні сферичного сегмента)*

21. **Volina T. M.**, Pylypaka S. F., Babka V. M., Nesvidomin A. V. Construction of meridian for given movement of particle on surface which rotates around the vertical axis. Machinery and Energetics. Journal of Rural Production Research. Kyiv. Ukraine. 2021. Vol. 12, no 3. P. 33–38. URL: http://dx.doi.org/10.31548/machenergy2021.03.033. https://technicalscience.com.ua/web/uploads/pdf/Machinery%20&%20Energetics_Vol.%2012,%20No.%203_33-38.pdf *(Здобувачем запропоновано меридіан поверхні вважати невідомою кривою, яку потрібно знайти за заданим законом руху частинки. Розглянуто окремий випадок, коли ним є горизонтальна пряма)*

22. **Volina T. M.**, Pylypaka S. F., Babka, V. M. Movement of particle on inner surface with preset meridian, which rotates around vertical axis. *Machinery and Energetics*. Journal of Rural Production Research. Kyiv. Ukraine. 2021. Vol. 12, no. 4. P. 15–20. URL: https://doi.org/10.31548/machenergy2021.04.015. *(Здобувачем запропоновано за меридіан поверхні взяти вітку параболи, зміщену на певну відстань від осі обертання. Побудовано графік зміни швидкості ковзання частинки по такій поверхні)*

23. **Volina T.**, Nesvidomin V., Nesvidomin A., Babka V., Hryshchenko I. Movement of a particle along an inclined cylinder rotating around its axis. Machinery and Energetics. Journal of Rural Production Research. Kyiv. Ukraine. 2022. Vol. 13, no. 2. P. 32–40. URL: https://doi.org/10.31548/machenergy.13(2).2022.32-40. *(Здобувачем побудовано абсолютні траєкторії руху частинки при різних кутових швидкостях обертання похилого циліндра)*

24. **Volina T.**, Pylypaka S., Nesvidomin V., Kalenyk M., Spirintsev D., Dieniezhnikov S., Hryshchenko I., Rebrii A., Herashchenko T., Soloshchenko V. Determining the shape of a flexible thread in the field of horizontal and vertical forces. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2024. Vol. 2, no. 7 (128). P. 24–30. URL: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.301711. *(Здобувачем математично показано, що формою гнучкої нитки є ланцюгова лінія незалежно від співвідношення вертикальних і горизонтальних розподілених сил)*

Статті у наукових виданнях, включених до Переліку наукових фахових видань України:

25. Захарова Т. М. Геометричне конструювання робочої поверхні органу для розсіювання мінеральних добрив. Вісник Сумського національного аграрного університету: науковий журнал. Серія «Механізація та автоматизація виробничих процесів». № 10, Вип. 34. Суми: СНАУ. 2018. С. 38–40.

26. Воліна Т. М. Дослідження руху частинки по спіральному жолобу під дією сили власної ваги. Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 99. К.: КНУБА. 2020. С. 65–78. URL: https://doi.org/10.32347/0131-579x.2020.99.65-78.

27. Воліна Т. М. Дослідження руху частинки по шорсткій поверхні, яка утворена гвинтовим рухом синусоїди, під дією сили власної ваги. Machinery & Energetics. Journal of Production Research. Vol. 11, no. 3. Kyiv. Ukraine. 2020. P. 187–194. URL: https://doi.org/10.31548/machenergy2020.03.187.

28. **Воліна Т. М.**, Пилипака С. Ф. Дослідження руху частинки по зовнішній поверхні циліндра під час його поступальних коливань в горизонтальних площинах.

Machinery & Energetics. Journal of Rural Production Research. Vol. 11, no. 4. Kyiv. Ukraine. 2020. P. 101–105. URL: https://doi.org/10.31548/machenergy2020.04.101. *(Здобувачем розглянуто окремий випадок ковзання частинки по поверхні циліндра, коли його вісь є горизонтальною)*

29. Воліна Т. М. Гвинтовий спуск, до аналітичного опису якого входить рівняння руху частинки по похилій площині. Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». Вип. 100. К.: КНУБА. 2021. С. 89–98. URL: https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.100.89-98.

30. **Воліна Т. М.**, Пилипака С. Ф., Несвідомін А. В. Рух частинки по сферичному сегменту з вертикальними радіально встановленими лопатками. Механіка та математичні методи. 2021. Т. 3, № 1. С. 27–36. URL: https://doi.org/10.31650/2618-0650-2021-3-1-27-36. *(Здобувачем побудовано графіки зміни відносної і абсолютної швидкостей при розгоні частинки)*

31. Pylypaka S., **Volina T.**, Babka V. The motion of a particle on a wavy surface during its translational circular oscillations in horizontal planes. Proceedings of Odessa Polytechnic University. 2021. Issue 1, no. 63. P. 44–52. URL: https://doi.org/10.15276/opu.1.63.2021.05. *(Здобувачем розглянуто окремий випадок коливань хвилястої поверхні, коли вона перетворюється у площину. Знайдено вираз радіуса кіл, які є траєкторіями ковзання частинки після стабілізації руху)*

32. **Volina T.**, Pylypaka S. Dependence of resistance of movement of the flexible strip on the surface from the curvature of its axis. Modern Problems of Modeling. 2021. Vol. 21. P. 66–73. URL: https://doi.org/10.33842/22195203/2021/21/66/73. *(Силу для згинання смуги при її русі по просторовій кривій на внутрішній поверхні циліндра здобувачем розкладено на дві складові, до яких входять геодезична і нормальна кривина траєкторії)*

33. Пилипака С. Ф., **Воліна Т. Н.**, Бабка В. М., Грищенко І. Ю. Рух частинки по зовнішній шорсткій поверхні конуса, який обертається навколо вертикальної осі. Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». 2021. Вип. 101. К.: КНУБА. С. 181–194. URL: https://doi.org/10.32347/0131-579x.2021.101. http://ageg.knuba.edu.ua/article/view/256333. *(Здобувачем досліджено*

вплив кута нахилу прямолінійних твірних конуса на траєкторію ковзання частинок по ньому)

34. **Volina T.**, Pylypaka S. Дослідження руху частинки у відцентровому апараті з вертикальними лопатками за допомогою рухомої системи координат. Modern Problems of Modeling. 2022. Vol. 23. P. 55–64. URL: http://magazine.mdpu.org.ua/index.php/spm/article/view/3030. *(Здобувачем складено рівняння руху частинки у векторному вигляді і розписано його в проекціях на орти тригранника Френе)*

35. Пилипака С. Ф., **Воліна Т. М.**, Несвідомін А. В., Бабка В. М., Грищенко І. Ю. Рух частинки по горизонтальному циліндру, що обертається навколо власної осі. Вісник Сумського національного аграрного університету: науковий журнал. Серія «Механізація та автоматизація виробничих процесів». 2022. № 1, Вип. 47. Суми: СНАУ. С. 30–35. URL: https://doi.org/10.32845/msnau.2022.1.5. *(Здобувачем знайдено умову, за якої частинка може залишатися на поверхні циліндра нерухомою в абсолютному русі)*

36. Пилипака С. Ф., **Воліна Т. М.**, Несвідомін А. В., Бабка В. М., Шуляк І. С. Транспортування матеріальної частинки вертикальним шнеком. Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». 2022. Вип. 102. К.: КНУБА. С. 165–180. URL: https://doi.org/10.32347/0131-579X.2022.102.165-180. *(Здобувачем знайдено граничне значення кута підйому гвинтової лінії – периферії шнека, при якому припиняється підйом частинки при заданій кутовій швидкості обертання шнека)*

37. Пилипака С. Ф., Несвідомін В. М., **Воліна Т. М.**, Бабка В. М., Грищенко І. Ю. Ковзання частинки по рухомій горизонтальній площині. Сучасні проблеми моделювання: зб. наук. Праць. МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол. Ю.М. Ковальов. Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького. 2022. Вип. 24. С. 147–155. URL: http://magazine.mdpu.org.ua/index.php/spm/article/view/3088/3516. *(За результатами чисельного інтегрування диференціальних рівнянь здобувачем побудовано відносну і абсолютну траєкторії руху частинки)*

38. Пилипака С. Ф., **Воліна Т. М.**, Захарова І. О. Переміщення частинки по обертовому рухомому вертикальному шнеку, обмеженому кожухом. Управління розвитком складних систем. 2022. Вип. 50. С. 115–121. URL: https://doi.org/10.32347/2412-9933.2022.50.115-121. *(Здобувачем з'ясовано, за яких умов можливе переміщення частинки як вгору, так і вниз)*

39. Пилипака С. Ф., **Воліна Т. М.**, Захарова І. О., Рибенко І. О., Ребрій А. М. Дослідження складного руху точки по площині із застосуванням тригранника і формул Френе. Міжвідомчий науково-технічний збірник «Прикладна геометрія та інженерна графіка». 2023. Вип. 104. К.: КНУБА. URL: https://doi.org/10.32347/0131-579X.2023.104.171-182. http://ageg.knuba.edu.ua/article/view/283802. *(Здобувачем знайдено складові абсолютного прискорення частинки в проекціях на орти супровідного тригранника Френе криволінійної траєкторії його руху)*

40. **Volina T.**, Nesvidomin V., Babka V., Hryshchenko I. Y., Kremets Ya. S. Curve axis of a silo pipeline for transportation of a crushed material. Bulletin of Sumy National Agrarian University. The Series: Mechanization and Automation of Production Processes. 2023. Vol. 53, no. 3. P. 20–25. URL: https://doi.org/10.32782/msnau.2023.3.4. *(Здобувачем розглянуто частковий випадок, коли криволінійною віссю силосопроводу є дуга кола)*

Патенти України на корисну модель:

41. Патент на корисну модель України № 111952, МПК A01C 17/00. Робочий орган для розсіювання мінеральних добрив. Пилипака С. Ф., **Захарова Т. М.**, Чепіжний А. В., Плавинська О. В. Сумський національний аграрний університет. Суми. № u201606109, заявлено від 06.06.2016; опубліковано 25.11.2016, Бюлетень № 22/2016. *(Здобувачем обґрунтовано формулу винаходу)*

42. Патент на корисну модель України № 133601, МПК A01C 17/00. Робочий орган для розсіювання мінеральних добрив. Пилипака С. Ф., **Захарова Т. М.**, Чепіжний А. В., Захарова І. О., Плавинська О. В. Державна служба інтелектуальної власності України. Київ. № u201811842, заявлено від 30.11.2018; опубліковано 10.04.2019, Бюлетень № 7/2019. *(Здобувачем обґрунтовано формулу винаходу)*

43. Патент на корисну модель України № 133602, МПК A01C 17/00. Робочий орган для розкидання сипучих матеріалів. Пилипака С. Ф., **Захарова Т. М.**, Чепіжний А. В., Захарова І. О., Плавинська О. В. Державна служба інтелектуальної власності України. Київ. № u201811843, заявлено від 30.11.2018; опубліковано 10.04.2019, Бюлетень № 7/2019. *(Здобувачем обґрунтовано формулу винаходу)*

Тези наукових доповідей:

44. Захарова Т. М. Обґрунтування конструкції робочого органу для розкидання мінеральних добрив. Обуховські читання: XI міжнародна науково-практична конференція, м. Київ, Україна, 1 березня 2016 року: збірник тез доповідей. Київ. 2016. С. 50–52.

45. **Захарова Т. М.**, Кремець Т. С. Конструювання плоских кривих у натуральній параметризації за допомогою годографа Піфагора. Сучасні проблеми геометричного моделювання: 19 міжнародна науково-практична конференція, м. Мелітополь, Україна, 06–09 червня 2017 року: тези доповідей. Мелітополь. 2017. С. 14. *(Здобувачем запропоновано застосування годографа Піфагора для конструювання плоских кривих у натуральній параметризації)*

46. Захарова Т. М. Диференціальні рівняння відносного переміщення частинки по зовнішній поверхні похилого циліндра, який здійснює коливальний рух. Технології XXI сторіччя: 24 міжнародна науково-практична конференція, м. Суми, Україна, 10–15 вересня 2018 року: збірник тез. Суми. 2018. Ч. 1. С. 18–20.

47. Захарова Т. М. Рух частинки по зовнішній поверхні циліндра, який здійснює поступальні коливання в горизонтальних площинах. Технології XXI сторіччя: 24 міжнародна науково-практична конференція, м. Суми, Україна, 10–15 вересня 2018 року: збірник тез. Суми. 2018. Ч. 1. С. 38–39.

48. Захарова Т. М. Вплив коефіцієнту тертя на рух частинки по зовнішній поверхні циліндра, який здійснює поступальні коливання в горизонтальних площинах. Технології XXI сторіччя: 24 міжнародна науково-практична конференція, м. Суми, Україна, 10–15 вересня 2018 року: збірник тез. Суми. 2018. Ч. 1. С. 44–45.

49. Захарова Т. М. Рух частинки по зовнішній поверхні циліндра, який здійснює поступальні коливання в горизонтальних площинах. Prospects for the development of technical sciences in EU countries and Ukraine: international scientific and practical conference, Wloclawek, Republic of Poland, December 21–22, 2018. Wloclawek. 2018. P. 163–168.

50. Пилипака С. Ф., Муквич М. М., **Захарова Т. М.** Аналітичний опис ізотропних ліній на поверхні уявного гіперболоїда та побудова мінімальних поверхонь. Сучасні проблеми геометричного моделювання: 21 міжнародна науково-практична конференція, м. Мелітополь, Україна, 04–07 червня 2019 року: тези доповідей. Мелітополь. 2019. С. 23. *(Здобувачем запропоновано аналітичний опис уявного гіперболоїда за допомогою комплексної змінної)*

51. Pylypaka S., Nesvidomin V., **Zaharova T.**, Pavlenko O., Klendiy M. The investigation of particle movement on a helical surface. Design, simulation, manufacturing: the innovation exchange: 2nd international conference, Sumy, Ukraine, June 11–14, 2019: book of abstracts. Sumy. 2019. P. 127. *(Здобувачем досліджено рух частинки для випадку, коли кут підйому нижньої гвинтової лінії жолоба є більшим за кут тертя)*

52. Pylypaka S., **Zaharova T.**, Zalevska O., Kozlov D., Podliniaieva O. The determination of the effort for pushing the flexible strip upon the surface of a horizontal cylinder. Advanced manufacturing processes: Grabchenko's international conference on advanced manufacturing processes, Odessa, Ukraine, September 10–13, 2019: book of abstracts. Odessa. 2019. P. 95. *(Здобувачем складено диференціальне рівняння руху гнучкої нестискуваної стрічки з прямокутним перерізом по внутрішній поверхні горизонтального циліндра)*

53. Пилипака С. Ф., **Воліна Т. М.**, Кресан Т. А., Захаров М. М., Ребрій А. М. Визначення зусилля для штовхання гнучкої стрічки вгору по поверхні горизонтального циліндра. Technical sciences: history, the present time, the future, EU experience: international scientific and practical conference, Wloclawek, Republic of Poland, September 27–28, 2019. Wloclawek. 2019. P. 136–140. *(Здобувачем отримано*

формули для визначення необхідної потужності для забезпечення заданої швидкості пересування гнучкої стрічки вгору по поверхні горизонтального циліндра)

54. Пилипака С. Ф., **Воліна Т. М.**, Залевська О. В. , Захарова І. О., Рибенко І. О. Обґрунтування конструкції робочого органу для розкидання мінеральних добрив. Technical sciences: history, the present time, the future, EU experience: international scientific and practical conference, Wloclawek, Republic of Poland, September 27–28, 2019. Wloclawek. 2019. P. 133–135. *(Здобувачем отримано формулу для визначення необхідного радіуса сфери в залежності від діаметра диска та кута сходу частинок з нього)*

55. Pylypaka S., **Volina T.**, Mukvich M., Efremova G., Kozlova O. Gravitational relief with spiral gutters, formed by the screw movement of the sinusoid. Design, simulation, manufacturing: the innovation exchange: 3rd international conference, Kharkiv, Ukraine, June 09–12, 2020: book of abstracts. Kharkiv. 2020. P. 120. *(Здобувачем розв'язано диференціальні рівняння руху по шорсткій гвинтовій поверхні, утвореній гвинтовим рухом синусоїди, та побудовано траєкторії руху частинки)*

56. **Volina T.**, Pylypaka S., Rebrii A., Pavlenko O., Kremets Ya. Particle movement on concave coulter of the centrifugal distributor with radially installed vertical blades. Advanced manufacturing processes: 2nd Grabchenko's international conference on advanced manufacturing processes, Odessa, Ukraine, September 08–11, 2020: book of abstracts. Odessa. 2020. P. 68. *(Здобувачем складено систему диференціальних рівнянь руху частинки по відцентровому розсіювачу з радіально встановленими вертикальними лопатками)*

57. Pylypaka S., **Volina T.**, Hryshchenko I., Rybenko I., Sydorenko N. Dynamics of a particle on a movable wavy surface. Advanced manufacturing processes: 2nd Grabchenko's international conference on advanced manufacturing processes, Odessa, Ukraine, September 08–11, 2020: book of abstracts. Odessa. 2020. P. 64. *(Здобувачем побудовано траєкторії ковзання частинки по циліндричній поверхні з синусоїдальним перерізом та графіки реакції поверхні)*

58. **Volina T.**, Pylypaka S., Nesvidomin V., Rybenko I., Sierykh L. Particle movement on the external surface of the cone that rotates around the vertical axis.

Advanced manufacturing processes: 3rd Grabchenko's international conference on advanced manufacturing processes, Odessa, Ukraine, September 07–10, 2021: book of abstracts. Odessa. 2021. P. 94. *(Здобувачем складено та розв'язано чисельними методами диференціальні рівняння руху частинки по поверхні із врахуванням початкової швидкості частинки в момент контакту з поверхнею)*

59. Pylypaka S., **Volina T.**, Nesvidomin A., Zakharova I., Rebrii A. Particle movement in a centrifugal device with vertical blades. Design, simulation, manufacturing: the innovation exchange: 4th international conference, Lviv, Ukraine, June 08–11, 2021: book of abstracts. Lviv. 2021. P. 132. *(Здобувачем запропоновано використання триграннкиа Френе у ролі рухомої системи координат для дослідження руху частинки по поверхні відцентрового апарата з вертикальними лопатками)*

60. Pylypaka S., **Volina T.**, Zalevska O., Semirnenko S., Hryshchenko I. Movement of the particle on the inner surface with a preset meridian. Advanced manufacturing processes: 3rd Grabchenko's international conference on advanced manufacturing processes, Odessa, Ukraine, September 07–10, 2021: book of abstracts. Odessa. 2021. P. 92. *(Здобувачем побудовано графіки відносної і абсолютної швидкостей частинки та отримано аналітичні залежності, які дозволяють визначити вплив конструктивних параметрів поверхні на процес руху)*

61. Пилипака С. Ф., **Волина Т. Н.** Транспортирование частицы вертикальным шнеком с соосным цилиндром, которые вращаются вокруг общей оси. Актуальні проблеми інженерної механіки: VIII міжнародна науково-практична конференція, м. Одеса, Україна, 11–14 травня 2021 року: тези доповідей. Одеса. 2021. С. 330–332. *(Здобувачем проведено якісний аналіз диференціальних рівнянь руху частинки по спільній лінії перетину вертикального шнека з циліндром, які обертаються навколо спільної осі)*

62. Пилипака С. Ф., **Воліна Т. М.** Транспортування частинки вертикальним шнеком із співвісним циліндром, що обертаються навколо власної осі. Обуховські читання: XVI міжнародна науково-практична конференція, м. Київ, Україна, 30 березня 2021 року: тези конференції. Київ. 2021. С. 7–8. *(Здобувачем досліджено*

випадок, коли кут підйому гвинтової лінії, якою є периферія вертикального шнека, більший від кута тертя)

63. **Воліна Т. М.**, Пилипака С. Ф. Дослідження залежності опору переміщення гнучкої смуги по поверхні від кривини її осі. Сучасні проблеми геометричного моделювання: 23 міжнародна науково-практична конференція, м. Мелітополь, Україна, 01–04 червня 2021 року: тези доповідей. Мелітополь. 2021. С. 12 – 13. *(Здобувачем отримано формулу для визначення зусилля, необхідного для подолання опору ковзання смуги)*

64. **Volina T. M.**, Pylypaka S. F., Kremets Ya. S., Kozlova O. G., Rebrii A. M. Organization of transportation of a particle by an inclined cylinder rotating around the axis. Design, simulation, manufacturing: the innovation exchange: 5th international conference, Poznan, Poland, June 7–10, 2022: book of abstracts. Poznan. 2022. P. 120. *(Здобувачем отримано диференціальні рівняння руху частинки в проекціях на осі нерухомої системи координат)*

65. Pylypaka S., **Volina T.**, Hryshchenko I., Dieniezhnikov S., Rybenko I. Mathematical model of lifting particles of technological material by vertical auger. Design, simulation, manufacturing: the innovation exchange: 5th international conference, Poznan, Poland, June 7–10, 2022: book of abstracts. Poznan. 2022. P. 126. *(Здобувачем побудовано графіки кінематичних характеристик руху частинки по вертикальному шнеку в співвісному кожусі)*

66. Воліна Т. М. Транспортування частинки рухомою хвилястою поверхнею. Прикладна геометрія, інженерна графіка та об’єкти інтелектуальної власності: XI всеукраїнська науково-практична конференція, м. Київ, Україна, 23 червня 2022 року: збірник доповідей. Київ. 2022. Випуск 11. С. 85–94.

67. **Volina T.**, Pylypaka S., Babka V., Zalevska O., Rebrii A. Sliding of a particle on the horizontal plane, which combines oscillating and rotary movements. Advanced manufacturing processes: 4th Grabchenko’s international conference on advanced manufacturing processes, Odessa, Ukraine, September 6–9, 2022: book of abstracts. Odessa. 2022. P. 87. *(Здобувачем побудовано траєкторії відносного руху частинки по площині)*

68. Kresan T., Pylypaka S., **Volina T.**, Rybenko I., Tatsenko O. Non-circular wheels from a congruent arcs. Advanced manufacturing processes: 4th Grabchenko's international conference on advanced manufacturing processes, Odessa, Ukraine, September 6–9, 2022: book of abstracts. Odessa. 2022. P. 39. *(Здобувачем описано криві симетричних дуг, які перетинаються під прямим кутом, квадратичним поліномом в полярній системі координат)*

69. Воліна Т. М. Ковзання частинки по рухомій горизонтальній площині. Сучасні проблеми геометричного моделювання: 24 міжнародна науково-практична конференція, м. Мелітополь, Україна, 08–09 вересня 2022 року: тези доповідей. Мелітополь. 2022. С. 8–9.

70. Воліна Т. М. Аналітичний опис руху частинки по зовнішній поверхні рухомого циліндра. Крамаровські читання: XI Міжнародна науково-технічна конференція, м. Київ, Україна, 22–23 лютого 2024 року: тези доповідей. Київ. 2024. С. 330–335.

71. Воліна Т.М. Переміщення частинки по рухомій хвилястій поверхні. Обуховські читання: XVII міжнародна науково-практична конференція, м. Київ, Україна, 30 березня 2023 року: тези конференції. Київ. 2023. С. 13–15.

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. «Рух тіла по площині має велике значення у землеробській механіці», – писав академік В. П. Горячкін у книзі «Земледельческая механика». Ці слова видатного вченого не втрачають своєї актуальності і на сьогоднішній день та підтверджуються численними прикладами практики розрахунку та проєктування сільськогосподарських машин та знарядь. Кількість сільськогосподарських задач, що вимагають для свого розв'язку застосування теорії руху частинки по поверхні, постійно збільшується. Спочатку об'єктами для таких задач були в основному гравітаційні площини, пізніше до них додалися різного роду гравітаційні поверхні, площини, що здійснюють різного роду рухи.

Одним зі складових елементів технологічного процесу роботи сільськогосподарських та інших машин є переміщення частинок по поверхнях їх робочих органів. При цьому кількісні та якісні показники цього технологічного процесу в значній мірі обумовлені конструктивними та кінематичними елементами руху самих робочих органів та кінематичними елементами руху по них частинок оброблюваного матеріалу. На цих конструктивних параметрах та кінематичних елементах і зосереджується увага дослідників. В усіх випадках визначення кінематичних характеристик руху частинки має свої особливості, що залежать від форми, конструктивних параметрів робочих органів, характеру взаємодії з технологічним матеріалом, властивостями самого матеріалу тощо. Важливо мати закономірності такої взаємодії, оскільки це дозволяє покращувати і вдосконалювати конструкції робочих органів машин. Виходячи зі сказаного, актуальність досліджень обумовлена необхідністю знаходження аналітичних залежностей, які описують рух частинок оброблюваного матеріалу по рухомих та стаціонарних поверхнях, шляхом розробки геометро-кінематичних методів їх визначення, з метою забезпечення найбільш ефективного виконання відповідного технологічного процесу.

Для аналітичного опису руху матеріалу, який складається з окремих частинок, застосовуються різні підходи. Це пояснюється складністю процесів, які відбуваються при взаємодії частинок між собою. Тому в багатьох випадках рух твердого тіла при обмежених його розмірах можна розглядати як рух частинки, а її рух – як рух матеріальної точки.

Необхідно, проте, мати на увазі, що оскільки реальні частинки технологічного матеріалу в тій чи іншій мірі відрізняються від матеріальних точок та значень сил тертя та опору середовища, що враховуються диференціальними рівняннями руху, у багатьох випадках змінюють свій характер під час руху, то і значення кінематичних елементів руху, отримані в результаті вирішення цих рівнянь, також певною мірою будуть відрізнятися від дійсних. Тому і отримані розв’язки практичних задач слід розглядати як наближені, що у той самий час не знижує їх цінність, оскільки в багатьох випадках немає необхідності в отриманні точних значень вказаних величин, а при необхідності ці величини завжди можуть бути перевірені та уточнені на основі експериментальних даних. Крім того, отримані результати дають залежності розвитку процесів, які допомагають знаходити необхідні рішення.

Перші фундаментальні дослідження, присвячені питанням теорії руху матеріальної точки або тіла по поверхні, належать Галілею [69], Ньютону, Гюйгенсу, Ейлеру, М. Остроградському та ін. Пізніше видатних успіхів у цьому напрямі досягли вчені І. Рахманінов, П. Воронець, С. Чаплигін. Результати їх досліджень мають велике загальнотеоретичне значення для розробки даної проблеми, хоча ці дослідження і не охоплюють всього спектру задач. В одних випадках результати отримано у загальному випадку та для отримання розв’язку тієї чи іншої задачі у кінцевому вигляді необхідні додаткові розробки, в інших випадках передбачається наявність ідеальних умов (наприклад, відсутність сил тертя), а тому застосування цих досліджень для практичних розрахунків є не завжди прийнятним. Це, вірогідно, і слугувало основою для підкреслення академіком В. Горячкіним необхідності подальшої розробки теорії руху частинки стосовно задач сільськогосподарського машинобудування.

Ведучи розмову про пізніший етап розвитку теорії руху матеріальної точки по поверхнях, слід відмітити роботи В. Горячкіна, Л. Лойцянського, Л. Левенсона, Н. Неронова, Б. Берга, Г. Терскова, Н. Акімова, П. Василенко [226–228].

Таким чином, в наш час накоплено достатньо об'ємний матеріал з даного питання, хоча і вирішено ще далеко не всю сукупність задач, що мають практичне значення для сільськогосподарської техніки. У зв'язку з цим виникає **науково-технічна проблема** розробки методології розв'язання задач теорії руху частинки, що можуть знайти своє застосування не тільки у сільськогосподарському машинобудуванні, але і в інших галузях техніки, що потребують знання законів руху частинки матеріалу по тих чи інших видах поверхонь, які застосовуються в робочих органах машин.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тема дисертації і отримані результати відповідають актуальним напрямам науково-технічної політики України відповідно до Постанови Кабінету Міністрів України № 476 від 30.04.2024 року «Про затвердження переліку пріоритетних тематичних напрямів наукових досліджень і науково-технічних розробок на період до 31 грудня року, наступного після припинення або скасування воєнного стану в Україні» в частині, що стосується дослідження новітніх проблем механіки суцільного середовища і механіки машин, а також розвитку новітніх галузей математичного моделювання актуальних проблем природничих наук.

Роботу виконано на кафедрі нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України у відповідності до плану наукових досліджень НДІ техніки і технологій за темою 110/9-пр-2020 «Обґрунтування методів підвищення виробництва зерна в сільськогосподарських підприємствах інтенсифікацією інженерного менеджменту» (номер державної реєстрації 0120U102086).

Мета і завдання дослідження. *Метою дослідження* є створення методологічної основи визначення параметрів руху частинок по поверхнях під дією прикладених сил та її практична реалізація.

Для досягнення поставленої мети було передбачено виконання таких *завдань*:

1. Провести критичний аналіз наукової літератури, що стосується руху частинок по різних поверхнях, а також у напрямках геометричного моделювання

об’єктів, процесів та явищ. Проаналізувати основні підходи до складання диференціальних рівнянь руху частинок по рухомих і нерухомих поверхнях;

2. Розробити узагальнений метод дослідження закономірностей руху частинок по стаціонарних гвинтових поверхнях за допомогою параметричних рівнянь у функції часу;

3. Запропонувати метод дослідження закономірностей руху частинок по поверхнях, що здійснюють коливальний рух;

4. Розробити метод дослідження закономірностей руху частинок по поверхнях обертання, які здійснюють обертальний рух навколо власної осі, за допомогою параметричних рівнянь у функції часу;

5. За допомогою параметричних рівнянь у функції часу запропонувати метод дослідження закономірностей руху частинок, які одночасно контактують з двома поверхнями;

6. Розглянути застосування тригранника і формул Френе при русі частинок по стаціонарних поверхнях;

7. Розглянути застосування тригранника і формул Френе для дослідження закономірностей складного руху частинок по рухомих поверхнях;

8. Впровадити результати виконаних досліджень у практику конструювання органів машин, робочі поверхні яких взаємодіють із частинками технологічного матеріалу, а також у навчальний процес.

Об’єктом дослідження є процес руху частинок по стаціонарних та рухомих шорстких поверхнях.

Предметом дослідження є визначення закономірностей руху частинок по рухомих і нерухомих поверхнях під дією прикладених сил.

Методи дослідження. Розробка геометро-кінематичних методів визначення параметрів руху частинок по поверхнях здійснювалася на основі методів класичної механіки, аналітичної та диференціальної геометрії, супровідного тригранника кривих ліній та формул Френе. Реалізація запропонованих методів виконувалася за допомогою комп’ютерної графіки з використанням середовищ символьної алгебри.

Теоретичною базою для проведення досліджень були роботи наступних науковців:

- з питань теорії руху частинок: Адамчук В. В., Булгаков В. М., Пилипака С. Ф., Несвідомін В. М., Клендій М. Б., Кресан Т. А., Василенко П. М., Заїка П. М.;

- в галузі геометричного моделювання та комп'ютерної графіки: Бадаєва Ю. І., Борисенка В. Д., Браїлова О. Ю., Ковальова Ю. М., Корчинського В. М., Лі В. Г., Малкіної В. М., Верещаги В. М., Плоского В. О., Сазонова К. О., Тормосова Ю. М., Шоман О. В., Юрчука В. П. та ін.

При роботі над дисертацією використовувалися наступні фундаментальні праці:

- Василенко П. М. «Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин»;
- Заїка П. М. «Избранные задачи земледельческой механики»;
- Адамчук В. В. «Теорія вібраційних машин сільськогосподарського виробництва», «Теория центробежных рабочих органов машин для внесения минеральных удобрений».

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному:

вперше:

- виведено узагальнені диференціальні рівняння ковзання частинки по гвинтовій поверхні під дією її власної ваги при заданій кривій осьового перерізу;

- описано рух частинки в гвинтовому конвеєрі з шнеком, що обертається всередині нерухомого циліндричного кожуха при зміні кута нахилу осі конвеєра від горизонтального до вертикального положення;

- описано рух частинки у вертикальному циліндрі з жорстко закріпленим у ньому співвісним шнеком, які обертаються навколо спільної осі;

- складено диференціальні рівняння відносного і абсолютного руху частинки, яка ковзає по поверхні, що здійснює коловий коливальний поступальний рух;

- здійснено візуалізацію траєкторій ковзання частинки не у вигляді графіків, а з прив'язкою до аксонометричного зображення поверхні;

отримало подальший розвиток:

- застосування супровідного тригранника напрямної кривої в ролі рухомої системи координат і формул Френе при складному русі частинки;

- складання диференціальних рівнянь руху частинки як по нерухомих так і по рухомих поверхнях із застосуванням внутрішніх криволінійних координат поверхні, що представляє собою узагальнений спосіб розв’язання подібних задач;

- застосування в ролі незалежної змінної довжини дуги траєкторії як у простому, так і складному русі.

Для всіх випадків складених диференціальних рівнянь здійснено їх розв’язання із застосуванням чисельних методів інтегрування і побудовано траєкторії ковзання по поверхнях.

Обґрунтованість і достовірність наукових положень та отриманих результатів забезпечується реалізацією розроблених методів визначення параметрів руху частинок по поверхнях у середовищі *MatLab* [94], візуалізацією отриманих результатів засобами комп’ютерної графіки та впровадженням результатів роботи у практику. Часткові результати, отримані за допомогою узагальнених моделей, повністю збігаються з результатами інших авторів.

Практичне значення одержаних результатів полягає у знаходженні аналітичного опису залежностей руху частинок по поверхнях, що були використані при проєктуванні технічних поверхонь, які контактують із технологічним матеріалом, та знайшли своє застосування в інших технічних задачах. Зокрема, на основі отриманих теоретичних результатів удосконалено конструкції машин відцентрової дії, що підтверджується трьома патентами України на корисну модель.

Впровадження результатів роботи здійснено:

- у проєктування решіт скальпелятора для первинного очищення зернового матеріалу від дрібних домішок в ТОВ «Авіс Зернотрейд» с. Біловоди Роменського району Сумської області (акт про впровадження/використання результатів дисертаційного дослідження від 21.09.2021 р.);

- у конструювання робочого органу автоматизованого пробовідбірника зернових та олійних культур для відбору зразків з автотранспорту для лабораторного випробування в ТОВ «Зернова Індустрія» смт. Низи Сумського району Сумської області (акт про впровадження/використання результатів дисертаційного дослідження від 11.06.2021 р.);

- в обґрунтування конструкції та режимів роботи транспортеру в’яжучого бетонної суміші (портландцементу) до дозаторів автоматизованого бетонно-розчинного вузла цеху з виробництва залізобетонних виробів та багатопустотних плит перекриття в ТОВ «НОТЕХС» м. Суми (акт про впровадження/використання результатів дисертаційного дослідження від 29.06.2021 р.);

- у конструювання робочого органу для розкидання сипучих матеріалів в ФГ Шепіль Я. А. с. Сула Сумського району Сумської області (акт про впровадження/використання результатів дисертаційного дослідження від 31.08.2021 р.);

- у проєктування відцентрового дискового розсіювача мінеральних добрив в ФГ Лисянський М. В. с. Мартинці Лебединського району Сумської області (акт про впровадження/використання результатів дисертаційного дослідження від 31.08.2021 р.);

- у навчальний процес Сумського національного аграрного університету при викладанні дисципліни «Інженерні мережі і конструкції в АПК» в розділі «Промислові будівлі в АПК» підготовки фахівців освітнього ступеня «Магістр» спеціальності 208 «Агроінженерія» (акт про впровадження/використання результатів дисертаційного дослідження від 24.09.2021 р.);

- у навчальний процес Національного університету біоресурсів і природокористування України при викладанні дисципліни «Дороги внутрішньогосподарського призначення» в розділі «Проєктування автомобільних доріг» підготовки фахівців освітнього ступеня «Магістр» спеціальності 275 – Транспортні технології (на автомобільному транспорті), у дипломне проєктування фахівців освітнього ступеня «Магістр» за ОНП «Будівництво та цивільна інженерія», у роботу наукових гуртків кафедри будівництва, а також при викладанні дисциплін «Нарисна геометрія та інженерна графіка», «Комп’ютери та комп’ютерні технології» підготовки фахівців освітнього ступеня «Бакалавр» спеціальності 192 –

Будівництво та цивільна інженерія (акт про впровадження/використання результатів дисертаційного дослідження від 04.10.2024 р.).

Особистий внесок здобувача. Дисертаційна робота є самостійно виконаною науковою працею з авторським підходом до розв’язання наукової проблеми. Особистий внесок автора дисертації в наукових працях, що опубліковані у співавторстві, зазначено в анотації. Усі положення, що виносяться на захист і складають наукову новизну виконаних досліджень, отримані особисто здобувачем. У дисертації не використовувалися результати кандидатської дисертації.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційних досліджень в повній мірі оприлюднено і апробовано на науково-практичних зібраннях різного рівня:

- XI, XVI, XVII та XVIII міжнародних науково-практичних конференціях «Обухівські читання» (м. Київ, 2016, 2021, 2023, 2024 р.);
- XI, XII Міжнародних науково-технічних онлайн конференціях «Крамаровські читання» з нагоди 117-ї річниці від дня народження доктора технічних наук, професора, члена-кореспондента ВАСГНІЛ, віце-президента УАСГН Крамарова Володимира Савовича (1906–1987) (м. Київ, 2023, 2024 р.);
- 24 міжнародній науково-практичній конференції «Технології XXI сторіччя» (м. Суми, 2018 р.);
- 1st–7th international conferences “Design, Simulation, Manufacturing: The innovation exchange” (Sumy, 2018; Lutsk, 2019; Kharkiv, 2020; Lviv, 2021; Poznan, Poland, 2022; High Tatras, Slovak Republic, 2023; Pilsen, Czech Republic, 2024);
- 1st–5th Grabchenko’s International Conferences on Advanced Manufacturing Processes (Odessa, 2019 – 2023);
- international scientific and practical conference “Prospects for the development of technical sciences in EU countries and Ukraine” (Wloclawek, Republic of Poland, 2018);
- international scientific and practical conference “Technical sciences: history, the present time, the future, EU experience” (Wloclawek, Republic of Poland, 2019);

- VIII міжнародній науково-практичній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки» (Одеса, 2021 р.);
- 19, 21, 23–26 міжнародних науково-практичних конференціях «Сучасні проблеми геометричного моделювання» (м. Мелітополь, 2017, 2019, 2021–2024 рр.);
- XI Всеукраїнській науково-практичній конференції «Прикладна геометрія, інженерна графіка та об’єкти інтелектуальної власності» (м. Київ, 2022 р.).

Публікації. Результати досліджень за обраною темою дисертаційної роботи опубліковані у 71 науковій праці, з яких 24 статті опубліковано в журналах, проіндексованих у міжнародній наукометричній базі даних Scopus (з першим авторством у 15 статтях), 16 – у періодичних виданнях, включених до Переліку наукових фахових видань України, 3 патенти України на корисні моделі, 28 тез наукових доповідей. Із загальної кількості 13 праць написано одноосібно.

Структура та обсяг роботи. Загальний обсяг дисертаційної роботи із 358 сторінок складають анотації на українській і англійській мовах, вступ, 5 розділів, висновки, список використаних джерел із 316 найменувань і 8 додатків. Основний текст дисертаційної роботи викладений на 344 сторінках, містить 114 рисунків.

РОЗДІЛ 1
ОСНОВНІ ВІДОМОСТІ ТА АНАЛІЗ НАУКОВИХ ПРАЦЬ З ТЕОРІЇ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

Механіка в залежності від умов конкретних задач використовує різні фізичні моделі. Найпростішою з них є матеріальна точка. Приведемо декілька визначень цього поняття. Матеріальна точка – це тіло, формою і розмірами якого можна знехтувати у даній задачі. Тобто, якщо форма і розміри тіла не чинять суттєвого впливу на характер його руху, то таке тіло можна прийняти за матеріальну точку. Матеріальна точка – це тіло, розмірами якого можна знехтувати в умовах даної задачі і масу якого можна вважати зосередженою в одній точці (в центрі ваги або у центрі мас). Існує також наступне визначення: матеріальна точка – це тіло, розміри якого незначно малі у порівнянні з масштабами руху. Або ж матеріальна точка – це тіло, при вивченні руху якого можна відволіктися від усіх його властивостей, окрім маси. Отже, під матеріальною точкою розуміють фізичну модель, яка відповідає наступним умовам:

1. Розміри тіла надзвичайно малі у порівнянні з відстанню, яке воно проходить внаслідок руху;
2. Всі точки тіла рухаються однаково.

Матеріальна точка – найпростіший елемент механіки. Її основні закони сформульовані саме для матеріальної точки. Усі інші об'єкти механіки представлені у вигляді тієї чи іншої сукупності матеріальних точок. У працях багатьох авторів (академіків Василенка П. М. [226–228], Заїки П. М., Адамчука В. В. [2, 3, 24, 26, 201–213]) поняття матеріальної точки асоціюється із поняттям частинки, що більше відповідає практичному змісту робіт стосовно руху сипкого технологічного матеріалу.

Довільне макроскопічне тіло або їх систему можна подумки розбити на малі частинки, які взаємодіють між собою та кожна з яких розглядається як матеріальна точка. Тоді вивчення руху довільної системи тіл зводиться до вивчення системи матеріальних точок.

Як відомо, механічний рух – це переміщення у просторі тіл (точок) або їхніх частин одна відносно одної. Усі основні типи поверхонь, що застосовуються в конструкціях сільськогосподарських та інших машин, за характером своїх кінематичних елементів руху можуть бути поділені на чотири групи:

- стаціонарні. Активною силою, що обумовлює рух частинки по таких поверхнях, є сила ваги самих частинок, тому ці поверхні також називають гравітаційними. До них відносяться нерухомі скатні дошки, різного роду лотки, гвинтові сортувальні поверхні та спуски тощо;
- такі, що здійснюють поступальний рух – це рух, при якому будь-яка лінія поверхні залишається паралельною своєму початковому положенню. До цієї групи поверхонь відносяться різного роду стрічкові транспортери, живильники тощо;
- такі, що здійснюють обертальний рух – це рух, при якому всі точки поверхні рухаються по колових траєкторіях, центри яких лежать на одній прямій (осі обертання). До них відносяться лотки транспортерів та ексгаустерів, диски та лопатки різного роду розподільників, сортувальні циліндри тощо;
- такі, що здійснюють коливальний рух – це такий рух, під час якого положення і швидкість руху точки поверхні повторюються через певні інтервали часу. На відміну від обертального руху, під час коливальних рухів точки поверхні рухаються по довільних конгруентних кривих, але сама поверхня обертального руху не здійснює. Якщо такими траєкторіями точок є конгруентні еліпси, то при рівності їх півосей вони перетворюються у кола, а при рівності однієї із них нулю траєкторії стають прямолінійними і виникають часткові коливання у вигляді зворотно-поступального руху поверхні (площини). До цих поверхонь відносяться рухомі скатні дошки, решета тощо. У багатьох випадках рух цих поверхонь є гармонійним або близьким до нього.

Рух частинки по стаціонарній поверхні вважається простим. Окремо виділяють складний рух – це такий рух матеріального об’єкту, при якому він одночасно рухається відносно якоїсь системи відліку, а та, у свою чергу, рухається відносно іншої системи відліку. При цьому розглядається питання про взаємозв’язок параметрів рухів матеріальної точки або тіла у цих двох системах відліку. Відносно даних досліджень мається на увазі рух частинки по поверхні, яка в свою чергу теж рухається. Ковзання частинки по поверхні називається відносним рухом, переміщення самої поверхні відносно нерухомої системи координат називається переносним рухом, а їх геометрична сума – абсолютним рухом.

Для дослідження руху частинки по поверхні необхідно мати аналітичні залежності, які описують цей рух. Зокрема, цього потребують численні інженерні задачі, які стосуються взаємодії робочих органів машин з частинками технологічного матеріалу. З огляду на це, доцільно здійснити аналіз наукової літератури стосовно існуючих способів описання руху матеріальної точки.

1.1. Способи описання руху матеріальної точки

Як відомо з курсу фізики, а саме кінематики матеріальної точки, положення і рух тіла в обраній системі відліку можуть бути описані різними способами: векторним, координатним та природнім. Для кожного способу використовується відповідний набір кінематичних величин. З огляду на це, у підрозділі здійснено аналіз наукової літератури стосовно кожного із цих способів та зв’язок між кінематичними характеристиками руху в різних системах відліку.

1.1.1. Векторний спосіб описання руху

Рух тіл (точок) відбувається у просторі та в часі, а тому для опису руху матеріальної точки треба знати, в яких місцях простору ця точка знаходилася та в які моменти часу вона проходила те чи інше положення. Переміщення матеріальної точки визначається по відношенню до будь-якого іншого довільно обраного тіла (тіла відліку) або групи тіл. З тілом відліку пов’язується система відліку – сукупність системи координат та годинника, відносно яких розглядається рух матеріальної точки. Такою системою відліку може бути, наприклад, декартова (прямокутна) система координат *XYZ*, пов’язана з будь-якою точкою *O* – початком координат. В нашій роботі ми її використовуватимемо, як нерухому систему координат. Матеріальна точка у тривимірному просторі має три ступені свободи, а тому її положення у просторі у будь-який момент часу t по відношенню до обраної системи координат описується трьома координатами: x, y, z або радіус-вектором $\bar{r}$, проведеним з початку координат в цю точку (див. рис. 1.1).

У загальному випадку рух матеріальної точки визначається скалярними рівняннями:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t), \end{aligned} \tag{1.1}$$

які є проекціями на осі координат декартової системи радіус-вектора $\bar{r}$:

$$\bar{r} = \bar{r}(t). \tag{1.2}$$

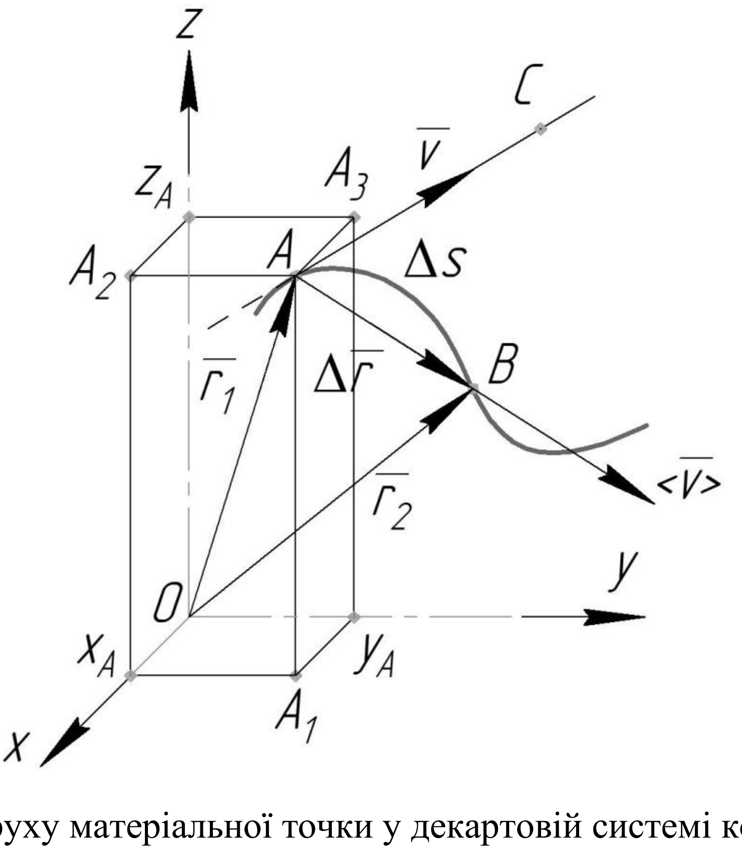


Рис. 1.1. До опису руху матеріальної точки у декартовій системі координат *XYZ*

Рівняння (1.1) називають кінематичними рівняннями руху матеріальної точки. Дані рівняння визначають траєкторію точки через параметр t. Це параметричне задання кривої, а тому виключенням з цих рівнянь часу t може бути визначено вид траєкторії.

Радіус-вектор, траєкторія, шлях, переміщення. При русі частинки вона, а відповідно і кінець її радіус-вектора, описує просторову неперервну лінію – годограф, який є траєкторією s руху точки. Отже, траєкторія руху матеріальної точки є геометричним місцем кінця її рухомого радіус-вектора.

Шлях Δs (див. рис. 1.1), пройдений частинкою за певний проміжок часу – це довжина траєкторії, пройденої нею за деякий проміжок часу. Шлях характеризує пройдену частинкою відстань, проте не дає уявлення про її кінцеве положення. Для визначення зміни положення точки у просторі застосовується поняття переміщення $\Delta\bar{r}$ – вектор, проведений із початкового в кінцеве положення точки на траєкторії – прямолінійний відрізок AB (див. рис. 1.1):

$$\Delta\bar{r} = \overline{r_2} - \overline{r_1}. \tag{1.3}$$

Модуль вектора переміщення $|\Delta\bar{r}|$ дорівнює відстані між початковим та кінцевим положенням точки та не перевищує пройдений шлях Δs: менше за нього у випадку криволінійного руху або ж дорівнює йому, якщо траєкторія руху точки є прямолінійною (прямолінійний рух): $|\Delta\bar{r}| \leq \Delta s$ (див. рис. 1.1).

Швидкість. Нехай матеріальна точка пройшла по криволінійній траєкторії певний шлях Δs за проміжок часу Δt. Для характеристики руху матеріальної точки вводиться векторна величина, яка визначає як швидкість руху, так і його напрям в даний момент часу. Відношення переміщення точки $\Delta\bar{r}$ до проміжку часу Δt, за який воно було здійснено, називається середнім вектором швидкості (або вектором середньої швидкості переміщення):

$$\langle\bar{V}\rangle = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}, \tag{1.4}$$

де Δt – проміжок часу, за який матеріальна точка змінює своє положення.

Напрям середнього вектора швидкості $\langle \bar{V} \rangle$ збігається з напрямом вектора переміщення $\Delta \bar{r}$ (див. рис. 1.1) і його модуль дорівнює:

$$|\langle \bar{V} \rangle| = \frac{|\Delta \bar{r}|}{\Delta t}. \tag{1.5}$$

Слід зазначити, що вектор середньої швидкості є визначеним тільки для заданого проміжку часу Δt, тож для різних ділянок траєкторії він може відрізнятись як за модулем, так і за напрямом, а тому недостатньо характеризує рух.

Якщо ж проміжок часу Δt руху точки наближається до нуля, то точка B наближається до точки A, а модуль вектора елементарного переміщення $\Delta \bar{r}$ (хорда AB) – до нескінченно малої ділянки траєкторії Δs та обидві вони в граничному положенні збігаються з дотичною AC. Тоді модуль вектора елементарного переміщення $|d\bar{r}|$ та шлях ds, пройдений точкою, збігаються:

$$|d\bar{r}| = ds. \tag{1.6}$$

Слід зазначити, що у цьому випадку вектор $d\bar{r}$ спрямований по дотичній до траєкторії, а отже визначає напрям руху частинки в даній точці траєкторії. В результаті криволінійний рух переходить в прямолінійний по нескінченно малому відрізку дотичної до траєкторії в околі точки A, а середня швидкість на малому шляху ds перейде в миттєву швидкість $\bar{V}$ (швидкість в даний момент часу в даній точці шляху) або просто швидкість, яка є точною характеристикою руху в кожну мить, у точці A, спрямовану по дотичній до траєкторії. При поступовому зменшенні Δt відношення $\frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$ прямує до визначеної границі миттєвої швидкості $\bar{V}$:

$$\bar{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \langle \bar{V} \rangle = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t} = \frac{d\bar{r}}{dt} \equiv \bar{r}'(t) \equiv \dot{\bar{r}}(t). \tag{1.7}$$

Оскільки переміщення $\Delta\bar{r}$ є приростом радіус-вектора, то миттєва швидкість є похідною радіус-вектора по часу. У виразі (1.7) наведено три різні позначення похідної по часу. Отже, миттєва швидкість руху у будь-якій точці траєкторії – це вектор, спрямований по дотичній до траєкторії, а по модулю рівний границі середньої швидкості при прямуванні проміжку часу до нуля $\left(\frac{\text{м}}{c}\right)$.

Вектор $\bar{V}$ показує не тільки швидкість переміщення точки, а й напрям цього процесу у будь-який момент часу. Тому вектор швидкості вважається мірою стану руху точки. Зокрема, поведінка вектора швидкості дає загальну інформацію про характер руху. Так, якщо $\bar{V} = \text{const}$, то ні величина, ні напрям швидкості не змінюються, тож матеріальна точка рухається рівномірно і прямолінійно. Якщо ж незмінним лишається тільки модуль вектора швидкості, то точка здійснює рівномірний криволінійний рух.

У практичних задачах часто важливим є не напрям руху, а саме швидкість подолання точкою шляху. Тому замість векторних величин $\langle\bar{V}\rangle$ та $\bar{V}$ використовуються середня $\langle V\rangle$ та миттєва V скалярні або шляхові швидкості, які визначаються через пройдений точкою шлях аналогічно до співвідношень (1.4) та (1.7):

$$\langle V\rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \tag{1.8}$$

$$V = |\bar{V}| = \left|\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\bar{r}|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}. \tag{1.9}$$

<u>Прискорення</u>. Рух може бути рівномірним (з постійною швидкістю), або нерівномірним, який характеризується прискоренням. Прискорення – це фізична величина, що характеризує швидкість зміни швидкості по модулю та за напрямом. Нехай за малий проміжок часу Δt матеріальна точка перемістилась із точки A, де вона мала швидкість $\overline{V_1}$, у точку B, де вона має швидкість $\overline{V_2}$ (див. рис. 1.2).

Приріст швидкості – це вектор, що дорівнює різниці векторів кінцевої та початкової швидкостей:

$$\Delta\bar{V} = \overline{V_2} - \bar{V}_1. \tag{1.10}$$

Середнє прискорення – це відношення зміни швидкості до проміжку часу, за який ця зміна відбулася:

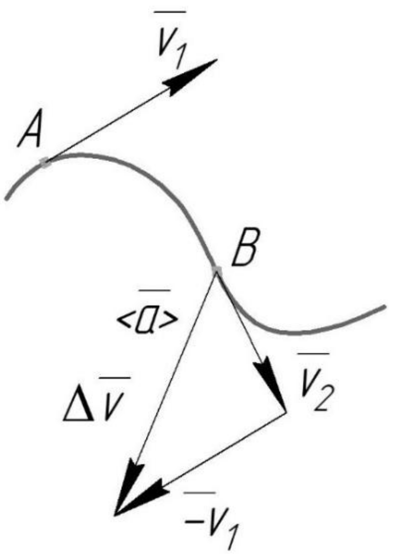


Рис. 1.2. Графічна ілюстрація до визначення прискорення при русі точки зі змінною швидкістю

$$\langle\bar{w}\rangle = \frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t}. \tag{1.11}$$

Вираз (1.11) визначає середнє прискорення $\langle\bar{w}\rangle$ за час Δt при змінній швидкості. З правила поділу вектора на скаляр стає зрозуміло, що середнє прискорення $\langle\bar{w}\rangle$ спрямовано так само, як і приріст швидкості $\Delta\bar{V}$ (див. рис. 1.2). Середнє прискорення $\langle\bar{w}\rangle$ може бути різним та залежить від проміжку часу Δt, по якому проводиться усереднення. Вектор миттєвого прискорення (або просто прискорення) $\bar{w}$ визначає швидкість зміни вектора швидкості у часі та вводиться аналогічно до миттєвої швидкості.

Нехай проміжок часу Δt руху точки наближається до нуля, точка B наближається до точки A, а середнє прискорення $\langle\bar{a}\rangle$ на ділянці AB перетворюється на миттєве прискорення $\bar{w}$ в точці A:

$$\bar{w} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar{V}}{\Delta t} = \frac{d\bar{V}}{dt} \equiv \bar{V}'(t) \equiv \dot{\bar{V}}(t) = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \equiv \bar{r}''(t) \equiv \ddot{\bar{r}}(t). \tag{1.12}$$

Тобто прискорення – це похідна від вектора швидкості або друга похідна від радіус-вектора по часу. Крім того, доцільно відзначити, що миттєве прискорення у будь-якій точці траєкторії – це вектор, спрямований під кутом до траєкторії в бік її увігнутості, а по модулю рівний границі середнього прискорення при наближенні проміжку часу до нуля. Одиниця виміру $-\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. До того ж вектор прискорення збігається за напрямом з вектором $\Delta\bar{V}$ і у загальному випадку складає деякий кут з напрямом швидкості (див. рис. 1.2). Якщо рух точки відбувається по прямій лінії, то прискорення є результатом зміни швидкості за абсолютною величиною і його напрям збігається із напрямом швидкості. Якщо траєкторією руху є крива лінія, то відбувається зміна швидкості не тільки по величині, але і по напряму. Внаслідок цього виникає ще одна складова – доцентрове прискорення. Воно спрямоване до центра кривини кривої.

1.1.2. Координатний спосіб описання руху

При координатному способі опису руху матеріальної точки з тілом відліку жорстко пов’язана певна система координат (найчастіше декартова), а положення точки у просторі визначається її координатами – відстанями від початку координат O до проекції точки на певну координатну вісь (див. рис. 1.3).

Закон руху точки визначається системою рівнянь залежностей координат від часу (1.1). Очевидно, що декартові координати є проекціями кінця радіус-вектора на осі координат:

$$\begin{gathered} x = r_x = r\cos\alpha\,; \\ y = y_x = r\cos\beta\,; \\ z = z_x = r\cos\gamma, \end{gathered} \tag{1.13}$$

де α, β, γ – напрямні кути (кути між радіус-вектором $\bar{r}$ та відповідними додатними півосями координат). Косинуси цих кутів мають назву напрямних (направляючих) косинусів вектора. Напрямні косинуси однозначно задають напрямок вектора. Для їх знаходження необхідно відповідні координати вектора поділити на його модуль:

$$\begin{gathered} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \\ \cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \end{gathered} \tag{1.14}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Зрозуміло, що сума квадратів напрямних косинусів дорівнює одиниці. Таким чином, знаючи координати точки, можна обчислити модуль її радіус-вектора та, через напрямні косинуси, його напрям.

Будь-який вектор може бути виражений через його проекції на координатні осі (компоненти вектора) та орти цих осей. Довільний вектор $\bar{a}$ можна представити у вигляді:

$$\bar{a} = a\overline{e_a}, \tag{1.15}$$

де a – модуль вектора $\bar{a}$;
$\overline{e_a}$ – вектор з модулем, рівним одиниці, що має такий самий напрям, як і вектор $\bar{a}$ (одиничний вектор або орт вектора $\bar{a}$).

Таким чином, будь-який вектор $\bar{r}$ може бути представлено у вигляді лінійної комбінації базисної системи векторів $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$:

$$\bar{r} = x\bar{\imath} + y\bar{\jmath} + z\bar{k}, \tag{1.16}$$

де $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$ – одиничні базисні вектори (орти), які визначають напрямки осей декартової системи координат (див. рис. 1.3) та утворюють її базис. Базис координатної системи – це трійка одиничних векторів (ортів) $\bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}$, що повністю визначає систему координат.

Продиференціювавши вираз (1.29) по часу і врахувавши означення (1.7), отримаємо вираз швидкості точки у координатній формі:

$$\bar{v} = \bar{\imath}\frac{dx}{dt} + \bar{\jmath}\frac{dy}{dt} + \bar{k}\frac{dz}{dt}, \tag{1.17}$$

де $\frac{dx}{dt} \equiv x'(t) = V_x, \frac{dy}{dt} \equiv y'(t) = V_y, \frac{dz}{dt} \equiv z'(t) = V_z$ – похідні координат по часу – проекції вектора швидкості на відповідні осі координат.

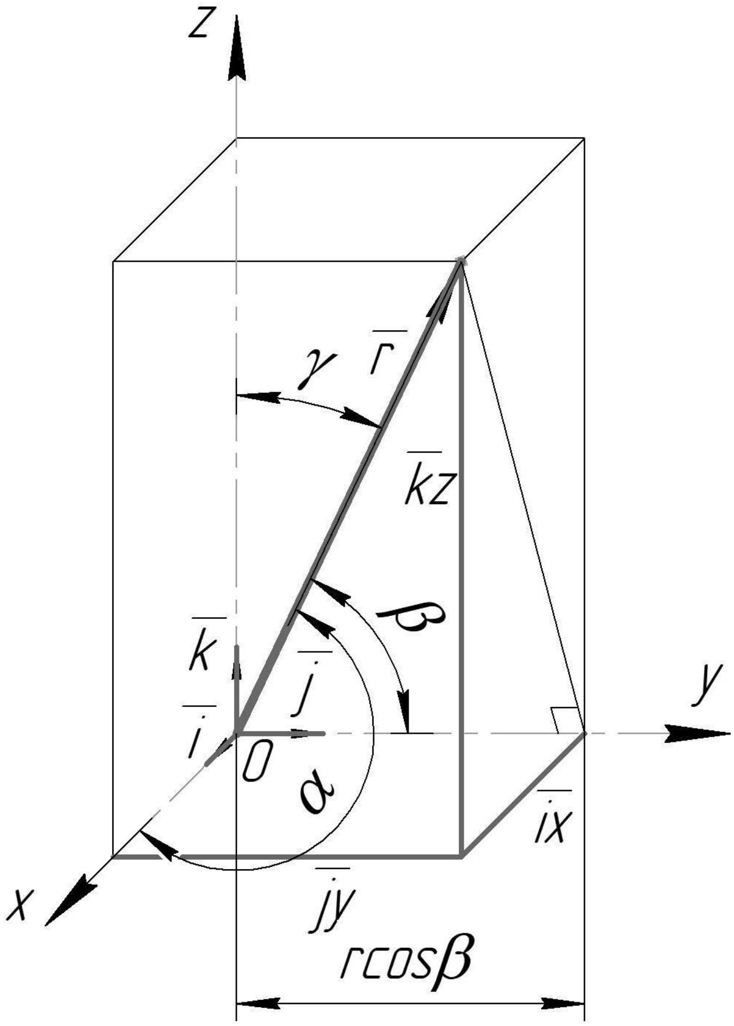


Рис. 1.3. Графічні ілюстрації до координатного способу описання руху матеріальної точки

Таким чином, за заданим законом руху в координатній формі (1.1) можна знайти проекції вектора швидкості, а також його модуль та напрям:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2};$$
$$\cos\alpha = \frac{V_x}{V} = \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}};$$
$$\cos\beta = \frac{V_y}{V} = \frac{V}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}; \qquad (1.18)$$
$$\cos\gamma = \frac{V_z}{V} = \frac{V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}.$$

Якщо рух точки описується параметричними рівняннями (1.1), то проекції прискорення на координатні осі визначаються їх диференціюванням:

$$V_x = x'(t),$$
$$V_y = y'(t), \qquad (1.19)$$
$$V_z = z'(t).$$

Аналогічним чином можна визначити абсолютну величину і напрямні косинуси вектора прискорення. Його проекції на осі декартової системи отримуємо диференціюванням виразів (1.19):

$$w_x = \frac{dV_x}{dt} = x''(t),$$
$$w_y = \frac{dV_y}{dt} = y''(t), \qquad (1.20)$$
$$w_z = \frac{dV_z}{dt} = z''(t).$$

Отже, при координатному способі описання руху матеріальної точки векторне рівняння траєкторії, швидкості та прискорення проекціюються на координатні осі, тобто замість нього записується відповідна система алгебраїчних рівнянь. З отриманих алгебраїчних рівнянь визначаються проекції шуканих векторів і, за потреби, через знайдені проекції визначаються модулі та напрямки шуканих векторів.

Рух точки у векторній формі потрібно розписувати у координатних системах для того, щоб можна було візуалізувати траєкторію. Для цього використовуються різні системи координат. Найбільш поширеною є прямокутна або декартова система. Формули (1.1), (1.18), (1.19), (1.20) записані для декартової системи координат. Окрім декартової науковцями наводяться інші системи: циліндрична, полярна, сферична, натуральна. Для кожної із них наводяться параметричні траєкторії руху точки та формули для визначення швидкості і прискорення. Для описання природнього способу руху використовується натуральна система, у якої один орт є дотичним до траєкторії руху, а другий – перпендикулярний до нього і спрямований до центру кривини. Розглянемо детальніше цей випадок.

1.1.3. Природній спосіб описання руху

Природній спосіб руху застосовується для описання руху точки по заданій траєкторії. Положення точки на траєкторії задається відстанню s від обраного початку відліку O до цієї точки, відрахованою вздовж траєкторії (криволінійною координатою). Позитивний напрям відліку криволінійної координати зазвичай обирається в напрямі руху точки. Закон руху при цьому визначається залежністю криволінійної координати точки від часу $s = s(t)$. Слід зазначити, що модуль зміни криволінійної координати – це шлях, пройдений точкою.

Для задання напряму руху та вектора швидкості з точкою зв’язують одиничний вектор (орт) $\bar{\tau}$ дотичної до траєкторії, спрямований в бік руху (див. рис. 1.4). У такому випадку:

$$\bar{V} = V_\tau \bar{\tau}, \tag{1.21}$$

де $V_\tau = \frac{ds}{dt}$ – траєкторія вектора швидкості на напрям $\bar{\tau}$. Швидкість V_τ є величиною алгебраїчною, її знак залежить від напряму руху точки, а модуль дорівнює модулю вектора швидкості:

$$|\bar{V_\tau}| = |\bar{V}| = V. \tag{1.22}$$

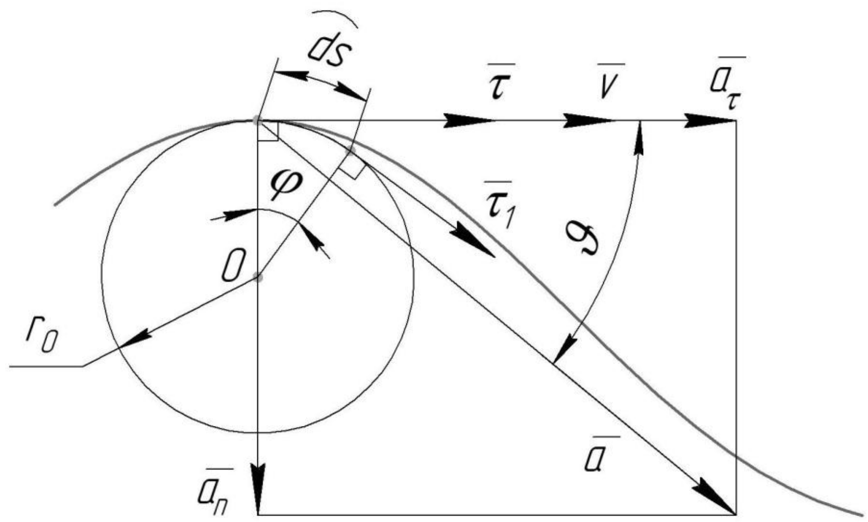


Рис. 1.4. Розкладання прискорення на тангенціальну і нормальну складову в натуральній системі координат

Вектор повного прискорення точки прийнято розкладати на дві складові:

$$\bar{w} = \frac{d(V_\tau \bar{\tau})}{dt} = \frac{dV_\tau}{dt}\bar{\tau} + V_\tau \frac{d\bar{\tau}}{dt}. \tag{1.23}$$

Перша складова (1.23):

$$\overline{w_\tau} = \frac{dV_\tau}{dt}\bar{\tau};$$
$$w_\tau = \frac{dV}{dt}. \tag{1.24}$$

Ця складова спрямована в напрямі орта дотичної $\bar{\tau}$ до траєкторії (див. рис. 1.4) і називається дотичним або тангенціальним прискоренням. Вона визначає зміну модуля вектора швидкості. Для будь-якого рівномірного руху ця складова дорівнює нулю.

Друга складова вектора повного прискорення (1.23) називається нормальним або доцентровим прискоренням:

$$\overline{w_n} = V_\tau \frac{d\bar{\tau}}{dt}. \tag{1.25}$$

Елементарна ділянка ds будь-якої кривої збігається з такою ж ділянкою дуги певного кола (кола кривини) з відповідним центром (центром кривини O) та радіусом r – радіусом кривини (див. рис. 1.4). З урахуванням цього можна визначити похідну $\frac{d\bar{\tau}}{dt}$. Приріст орта $\bar{\tau}$ за гранично малий проміжок часу dt зумовлено його поворотом на нескінченно малий кут $d\varphi$ при переміщенні точки по траєкторії на нескінченно малу відстань ds (див. рис. 1.4). Очевидно, що кути повороту орта $\bar{\tau}$ і радіуса кривини траєкторії r однакові, отже:

$$\begin{gathered} \left|\frac{d\tau}{\tau}\right| = \frac{ds}{r}; \\ |d\tau| = \frac{ds}{r}. \end{gathered} \tag{1.26}$$

Оскільки кут $d\varphi$ є нескінченно малим, то вектор $d\bar{\tau}$ спрямований перпендикулярно до вектора $\bar{\tau}$ (див. рис. 1.5). Отже, якщо ввести орт нормалі $\bar{n}$ до траєкторії , то вектор $d\bar{\tau}$ можна записати:

$$d\bar{\tau} = |d\bar{\tau}|\bar{n} = \frac{ds}{r}\bar{n}. \tag{1.27}$$

Діленням (1.27) на dt з урахуванням (1.9) отримаємо:

$$\frac{d\bar{\tau}}{dt} = \frac{1}{r} \cdot \frac{ds}{dt}\bar{n} = \frac{V}{r}\bar{n}. \tag{1.28}$$

Отже, відповідно до (1.27):

$$\overline{w_n} = V_\tau \frac{V}{r}\bar{n}; \qquad w_n = \frac{V^2}{r}. \tag{1.29}$$

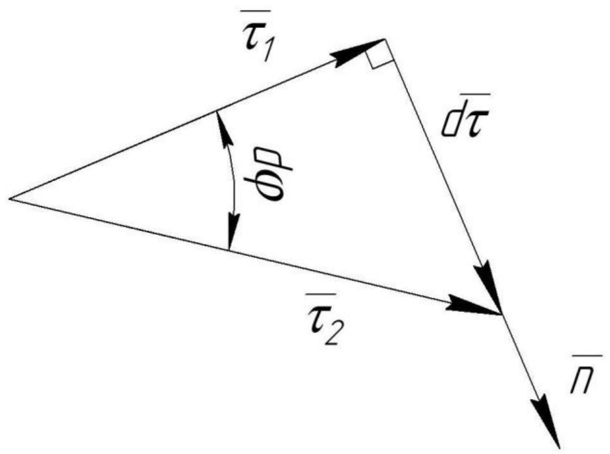


Рис. 1.5. Поворот орта $\bar{\tau}$ на нескінченно малий кут $d\varphi$

Цей вектор у кожній точці спрямований по нормалі до центра кривини траєкторії (звідси і його назва). Він показує, як швидко повертається орт $\bar{\tau}$, тобто, змінюється напрям руху точки. Саме тому при прямолінійному русі $\overline{w_n} = 0$.

Повне прискорення $\bar{a}$ (див. рис. 1.5) дорівнює сумі тангенціального та нормального:

$$\bar{w} = w_\tau \bar{\tau} + w_n \bar{n}. \tag{1.30}$$

Його модуль:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{V^2}{r}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dt}\right)^2}. \tag{1.31}$$

Якщо взяти до уваги, що

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = V \frac{dV}{ds}, \tag{1.32}$$

то формулу (1.31) можна переписати таким чином, що незалежною змінною при визначенні прискорення в натуральній системі буде натуральний параметр – довжина дуги кривої [124, 221], по якій рухається точка:

$$w = \sqrt{w_\tau^2 + w_n^2} = \sqrt{\left(\frac{V^2}{r}\right)^2 + V^2 \left(\frac{dV}{ds}\right)^2}. \tag{1.33}$$

Слід відмітити, що криволінійний рух завжди відбувається з прискоренням, адже швидкість змінюється хоча б за напрямом.

Крім того, за доцентровим та дотичним прискоренням можна визначити характер руху:

1) $w_\tau = 0, w_n = 0$ – прямолінійний рівномірний рух;
2) $w_\tau = \text{const}, w_n = 0$ – прямолінійний рівнозмінний рух;
3) $w_\tau = f(t), w_n = 0$ – прямолінійний рух зі змінним прискоренням;
4) $w_\tau = 0, w_n = \text{const} \rightarrow V = \text{const}$ та $r = \text{const}$ – рівномірний рух по колу;
5) $w_\tau = 0, w_n \neq 0$ – рівномірний криволінійний рух;
6) $w_\tau = \text{const}, w_n \neq 0$ – рівнозмінний криволінійний рух;
7) $w_\tau = f(t), w_n \neq 0$ – криволінійний рух зі змінним прискоренням.

1.2. Підходи до розробки методологічної основи визначення параметрів руху частинок по поверхнях

Якщо лінія є однопараметричною множиною точок, то поверхня – двопараметрична (двовимірна). Параметричні рівняння поверхні мають вигляд:

$$X = X(u, v);$$
$$Y = Y(u, v); \qquad (1.34)$$
$$Z = Z(u, v),$$

де u, v – незалежні змінні (параметри).

Для того, щоб відрізняти параметричні рівняння лінії від параметричних рівнянь поверхні, рівняння останніх позначають прописними літерами X, Y, Z. Якщо одній змінній (наприклад, u) у рівняннях (1.34) надати постійного значення (u=*const*), то вони залежатимуть від однієї змінної та описуватимуть однопараметричну множину точок, тобто лінію. Ця лінія називається координатною або параметричною лінією і розташовується на поверхні (1.34). Оскільки при її утворенні змінюється параметр v, то вона ще носить назву v-лінії. При різних постійних значеннях параметра u утворюються різні v-лінії, що утворюють сім’ю координатних v-ліній. Параметр u вздовж них має певне постійне значення, змінюється лише параметр v. Відповідно, при різних постійних значеннях параметра v утвориться сім’я координатних u-ліній (див. рис. 1.6).

При наданні конкретних значень параметрам $u=u_A$ і $v=v_A$ на поверхні з’являться дві координатні лінії, які перетнуться в точці A (див. рис. 1.6). Таким чином, положення кожної точки на поверхні може бути визначено двома числами: значеннями координат u і v тих координатних ліній різних сімей, які проходять через цю точку. Ці числа мають назву криволінійних координат точки A (u_A і v_A) на поверхні. При їх підстановці у рівняння (1.34) можна обчислити три координати точки у декартовій системі координат $Oxyz$. Дві сім’ї координатних ліній утворюють сітку на поверхні, яка в загальному випадку є косокутною. Деякі поверхні можна описати параметричними рівняннями таким чином, що вони будуть віднесені до прямокутної (ортогональної) сітки координатних ліній. Таке віднесення значно спрощує аналітичний опис і знаходження диференціальних характеристик, але не завжди є можливим. Прикладом таких поверхонь є поверхні обертання, віднесені до сімей координатних ліній, що складаються з паралелей і меридіанів.

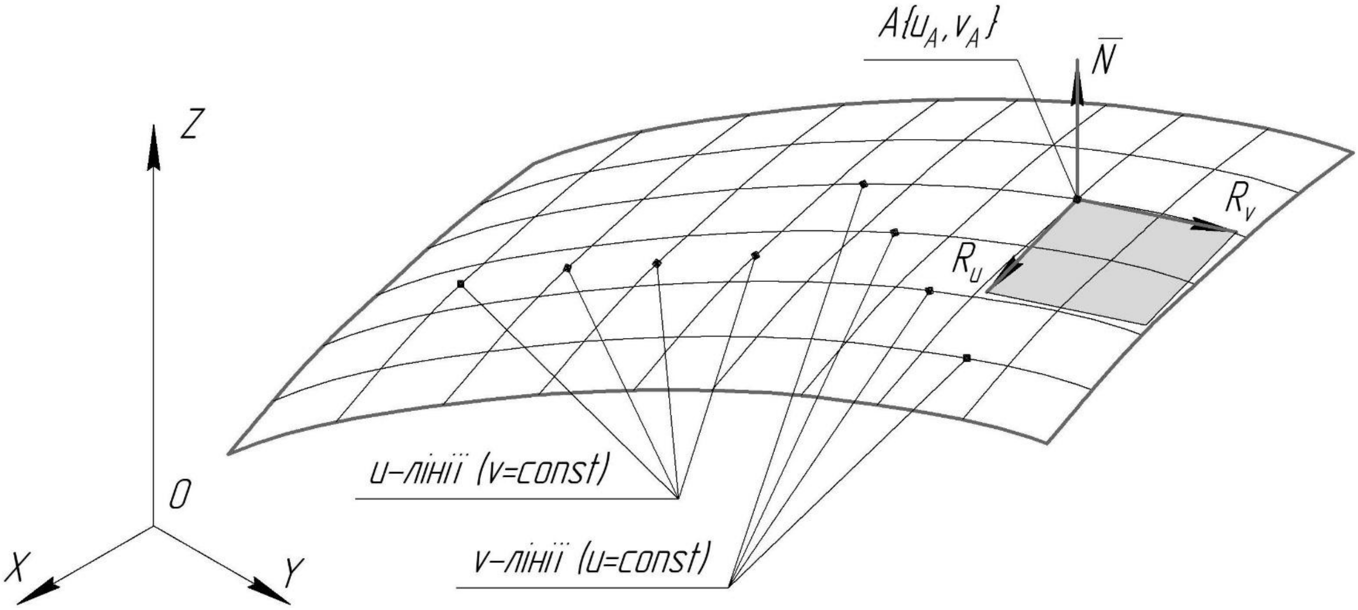


Рис. 1.6. Криволінійна координатна сітка на поверхні загального виду, дотична площина і нормаль до поверхні

У загальному випадку обидві сім'ї координатних ліній поверхні є просторовими кривими. В окремому випадку вони можуть бути плоскими або прямими.

Якщо між незалежними змінними *u* і *v* поверхні встановити певний взаємозв'язок у вигляді $u=u(v)$, $v=v(u)$ або через третю змінну *t* у вигляді $v=v(t)$; $u=u(t)$, то рівняння (1.34) стають рівняннями однієї змінної (*u*, *v* або *t*), тобто вони опишуть лінію на поверхні. Такий взаємозв'язок між змінними поверхні називається внутрішнім рівнянням лінії на ній. При складанні диференціальних рівнянь руху матеріальної точки по поверхні траєкторія є шуканою кривою, яка в диференціальних рівняннях представлена внутрішнім рівнянням.

Якщо внутрішнє рівняння лінії на поверхні задано, то параметричні рівняння (1.34) стають залежними лише від однієї змінної, тобто вони стають рівняннями кривої на поверхні.

Поверхню можна задати не тільки параметричними рівняннями, але і рівняннями у явній або неявній формі. Така форма запису поверхонь зустрічається у курсі класичної механіки при аналітичному описі руху частинки по цих поверхнях.

Наша методологія полягає у використанні тільки параметричних рівнянь поверхонь, віднесених до криволінійної координатної сітки.

При русі частинки по поверхні між ними відбувається силова взаємодія, при цьому реакція поверхні завжди спрямована по нормалі до неї. Щоб побудувати нормаль до поверхні в заданій точці A, спочатку необхідно провести дотичну площину в цій точці. Через кожну точку поверхні проходить по одній координатній лінії кожної сім'ї. Якщо в точці A до кожної лінії провести дотичні прямі (див. рис. 1.6 – вектори $\overline{R_u}$ і $\overline{R_v}$), то перетин цих прямих утворює дотичну площину. Вектори $\overline{R_u}$ і $\overline{R_v}$ є частковими похідними рівняння поверхні за відповідним параметром. Перпендикуляр до дотичної площини, проведений через точку дотику, називається нормаллю $\overline{N}$ поверхні. Оскільки нормаль перпендикулярна до векторів $\overline{R_u}$ і $\overline{R_v}$, то її проекції на осі системи координат $Oxyz$ знаходяться з векторного добутку $\overline{R_u} \times \overline{R_v}$:

$$\overline{N} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{vmatrix} = [Y_u Z_v - Y_v Z_u; -X_u Z_v + X_v Z_u; X_u Y_v + X_v Y_u]. \tag{1.35}$$

Змінна з індексом знизу означає часткову похідну по відповідній змінній, наприклад, $X_u = \frac{\partial X}{\partial u}$. Якщо початок вектора $\overline{N}$ помістити в точку A поверхні (див. рис. 1.6), то його напрямок вкаже одну із двох протилежних сторін у даній точці. Якщо два останні рядки визначника (1.35) поміняти місцями, то вектор $\overline{N}$ змінить свій напрямок на протилежний. Відповідно до цієї умови будь-яка сторона поверхні може бути прийнята за позитивну, бо від користувача залежить, які координатні лінії прийняти за лінії u, а які – за лінії v. При русі частинки по поверхні напрямок нормалі повинен збігатися з напрямом реакції поверхні, тому порядок розташування двох нижніх рядків у визначнику (1.35) в кожному конкретному випадку вибирається в залежності від того, на якій стороні поверхні знаходиться частинка.

Якщо з нелінійчатою поверхнею дотична площина має одну спільну точку, то до лінійчатої вона дотикається уздовж прямолінійної твірної. При цьому є істотна відмінність між дотичною площиною до розгортної та нерозгортної поверхні. Для розгортної поверхні дотична площина вздовж твірної AB загальна, тобто в усіх точках вздовж цієї твірної нормаль $\overline{N}$ не змінює свого напрямку, а для нерозгортної – дотична площина змінює своє розташування по мірі просування точки дотику по твірній, обертаючись навколо неї. Відповідно змінює свій напрямок нормаль $\overline{N}$ до поверхні.

1.3. Загальні підходи до опису руху частинки по поверхнях

Аналітичний опис частинки по поверхнях під дією прикладених до неї сил розглядається у розділі механіки, яка носить назву «Динаміка». Основним законом динаміки є другий закон Ньютона: похідна по часу від кількості руху матеріальної точки дорівнює діючій на неї силі:

$$\frac{d}{dt}(m\bar{V}) = \bar{F}. \qquad (1.36)$$

У нашій роботі маса частинки є сталою, тому рівняння (1.36) можна записати у наступному вигляді:

$$m\frac{d\bar{V}}{dt} = F \qquad \text{або} \qquad m\bar{w} = \bar{F}, \qquad (1.37)$$

де $\bar{w}$ – прискорення частинки, м/с^2.

Існує дві задачі динаміки:

1) знаючи закон руху матеріальної точки необхідно знайти діючі на неї сили;

2) знаючи діючі на матеріальну точку сили, а також початкове положення і швидкість, знайти закон руху точки.

Друга задача в динаміці є основною. Якщо перша задача не представляє труднощів для розв'язання і зводиться до диференціювання, то друга зводиться до складання диференціальних рівнянь, які можна розв'язати в аналітичному вигляді тільки для найпростіших випадків. В роботі розглядається друга задача.

1.3.1. Простий рух частинки по поверхні

Простим рухом частинки по поверхні вважатимемо рух частинки по стаціонарній поверхні, тобто до поверхні, яка в нерухомій (глобальній) системі координат теж залишається нерухомою. Самий простий випадок руху частинки – вільний рух, коли на неї не накладаються ніякі обмеження. В нашій роботі такими обмеженнями є зустріч частинки із поверхнею, після чого вона повинна рухатися (ковзати) по ній. Для вільного руху частинки рівняння (1.37) можна записати у векторному вигляді наступним чином:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}, \tag{1.38}$$

де $\bar{r}$ – радіус-вектор частинки в нерухомій системі координат *OXYZ*;
$\bar{F}$ – рівнодійна прикладених до частинки сил.

Проекціюючи векторне рівняння (1.38) на осі нерухомої системи координат *OXYZ*, отримаємо три диференціальні рівняння руху вільної частинки в прямокутних декартових координатах:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x; \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y; \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z. \end{aligned} \tag{1.39}$$

Ми будемо розглядати рух частинки, траєкторія якої розташована на поверхні, отже на її вільний рух накладаються обмеження. З’являється сила реакції R поверхні, яка діє на частинку. В такому випадку векторне рівняння (1.38) перепишеться наступним чином:

$$m\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F} + \bar{R}, \tag{1.40}$$

де R – сила реакції поверхні.

Відповідно рівняння (1.39) в проекціях на осі нерухомої системи координат запишуться:

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + Rl; \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + Rm; \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + Rn, \end{aligned} \tag{1.41}$$

де l, m, n – напрямні косинуси нормалі до поверхні в точці знаходження частинки. Напрям нормалі змінюється при русі частинки, тобто залежить від траєкторії. Знаходження вектору нормалі в загальному випадку здійснюється за формулою (1.35).

Рівняння (1.41) можна записати в наступному вигляді:

$$\begin{bmatrix} mx" = F_x + \dfrac{R}{\Delta f}\cdot\dfrac{df}{dx} \\ my" = F_y + \dfrac{R}{\Delta f}\cdot\dfrac{df}{dy} \\ mz" = F_z + \dfrac{R}{\Delta f}\cdot\dfrac{df}{dz} \end{bmatrix}, \tag{1.42}$$

де F_x, F_y і F_z – проекції прикладених сил;

R – нормальна реакція зв'язку;

$\frac{1}{\Delta f} \cdot \frac{df}{dx} = l, \frac{1}{\Delta f} \cdot \frac{df}{dy} = m, \frac{1}{\Delta f} \cdot \frac{df}{dz} = n, f = f(x, y, z, t)$ – рівняння зв'язку;

$$\Delta f = \sqrt{\left(\frac{df}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 + \left(\frac{df}{dz}\right)^2}.$$

Якщо у рівняння поверхні $f = f(x, y, z, t)$ час t явно не входить, то такий зв'язок є стаціонарним, тобто положення поверхні не залежить від часу і поверхня є нерухомою.

Якщо характер зв'язку невідомий, то система (1.42) не може бути розв'язана. В такому випадку для її розв'язання вводяться невизначені множники Лагранжа.

Система диференціальних рівнянь (1.42) описує рух точки по ідеально гладенькій поверхні, коли коефіцієнт тертя дорівнює нулю. Але абсолютно гладеньких поверхонь або частинок в реальності не існує, отже потрібно враховувати силу тертя $F_m = fR$, де R – сила нормальної реакції, f – коефіцієнт тертя. Ця сила спрямована в протилежну сторону ковзання частинки, тобто до вектору її швидкості. Напрямні косинуси вектору швидкості є похідними рівнянь траєкторії по дуговій координаті s, де s – довжина дуги траєкторії. Наприклад, напрямний косинус вектору швидкості V по відношенню до осі Ox визначається наступним чином: $\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{ds}{dt}} = \frac{x'}{V}$. Аналогічно $\frac{dy}{ds} = \frac{y'}{V}$, $\frac{dz}{ds} = \frac{z'}{V}$. З врахуванням цього диференціальні рівняння (1.42) набувають вигляду:

$$\begin{bmatrix} mx'' = F_x + \frac{R}{\Delta f} \cdot \frac{df}{dx} - fR\frac{x'}{V} \\ my'' = F_y + \frac{R}{\Delta f} \cdot \frac{df}{dy} - fR\frac{y'}{V} \\ mz'' = F_z + \frac{R}{\Delta f} \cdot \frac{df}{dz} - fR\frac{z'}{V} \end{bmatrix}. \qquad (1.43)$$

Окрім сили тертя може бути присутня сила опору середовища, наприклад, повітря. Вона теж спрямована в сторону, протилежну вектору швидкості. В даній роботі ця сила не розглядалася.

Система диференціальних рівнянь руху частинки може проекціюватися не тільки на нерухому систему координат, а також і на рухому. В ролі рухомої системи координат може бути тригранник Дарбу [5], у якого два орти розташовані у дотичній до поверхні площині, а третій орт збігається із нормаллю до поверхні. Тригранник Дарбу рухається по поверхні таким чином, що один із його ортів є дотичним до траєкторії руху частинки. Такий підхід до знаходження кінематичних характеристик руху частинки по поверхні розглянуто у дослідженні [275].

В ролі рухомої системи може виступати супровідний тригранник Френе траєкторії руху частинки. Частинка при цьому знаходиться у його вершині. Як зазначалося в підрозділі 1.1.3, прискорення частинки проекціюється на два орти тригранника – на орт дотичної $\bar{\tau}$ і орт головної нормалі $\bar{n}$ а на бінормаль $\bar{b}$ проекція прискорення дорівнює нулю. Зважаючи на те, що кривина k кривої є оберненою величиною до радіуса r кривини, формули (1.24), (1.29) можна переписати наступним чином:

$$\begin{gathered} w_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = V\frac{dV}{ds}; \\ w_n = V^2 k; \\ w_b = 0, \end{gathered} \tag{1.44}$$

де s – довжина дуги траєкторії. Вона може виступати в ролі незалежної змінної або ж час t.

Векторне рівняння (1.37) можна розписати в рухомій системі тригранника, якщо відомі проекції прикладених сил на його орти. Сила тертя F_m завжди спрямована в протилежну сторону вектору швидкості, тобто в даному випадку в протилежну сторону орту $\bar{\tau}$. Сила реакції R спрямована по нормалі до поверхні і в загальному випадку розташована в нормальній площині тригранника. Але якщо траєкторією руху є геодезична лінія, то нормаль до поверхні і орт головної нормалі збігаються, отже сила реакції R буде спрямована по головній нормалі траєкторії. В такому випадку векторне рівняння (1.37) розпишеться в проекціях на орти тригранника наступним чином:

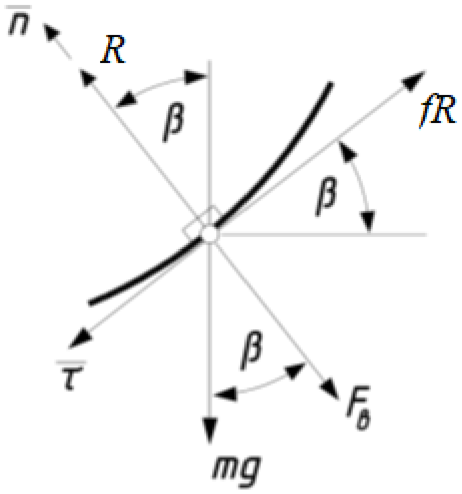


Рис. 1.7. Схема розташування прикладених до частинки сил в системі тригранника Френе (бінормаль $\bar{b}$ проекціюється в точку)

$$mV\frac{dV}{ds} = F_\tau;$$
$$mV^2k = R + F_n. \tag{1.45}$$

Нехай, наприклад, частинка рухається під дією сили ваги по кривій поперечного перерізу циліндричної поверхні, яка є для неї геодезичною лінією (див. рис. 1.7). Прикладеними силами є сила ваги mg, де g – прискорення вільного падіння і сила тертя fR. Силу ваги mg потрібно спроекціювати на орти тригранника. Зробимо це через кут β, який утворює дотична до траєкторії з горизонтальною прямою. Отже,

$$F_\tau = mg\sin\beta - fR;$$
$$F_n = mg\cos\beta. \tag{1.46}$$

Підставимо (1.46) в (1.45) і отримаємо:

$$mV\frac{dV}{ds} = mg\sin\beta - fR;$$
$$mV^2k = R - mg\cos\beta. \tag{1.47}$$

У рівняннях (1.47) швидкість V, кривина k, реакція R і кут β є змінними величинами, залежними від довжини дуги s. Між кривиною k і кутом β існує відома залежність: $k = \frac{d\beta}{ds}$. З урахуванням цього система (1.47) набуває вигляду:

$$mV\frac{dV}{ds} = mg\sin\beta - fR;$$
$$mV^2\frac{d\beta}{ds} = R - mg\cos\beta. \tag{1.48}$$

Система (1.48) не може бути розв’язана, оскільки до неї входить три невідомі функції: швидкість V, реакція R і кут β. Отже, одну функцію потрібно задати (наприклад, $\beta = \beta(s)$). Розглянемо найпростіший випадок: $\beta=const$. В цьому випадку траєкторією руху частинки буде пряма лінія. Із другого рівняння системи (1.48) отримуємо:

$$R = mg\cos\beta. \tag{1.49}$$

Після підстановки (1.49) в перше рівняння (1.48) отримаємо диференціальне рівняння, яке може бути розв’язане:

$$VdV = g(\sin\beta - f\cos\beta)ds. \tag{1.50}$$

У диференціальному рівнянні (1.50) можна перейти від змінної s до часу t. Для цього розділимо ліву і праву частину на dt. Після цього отримаємо:

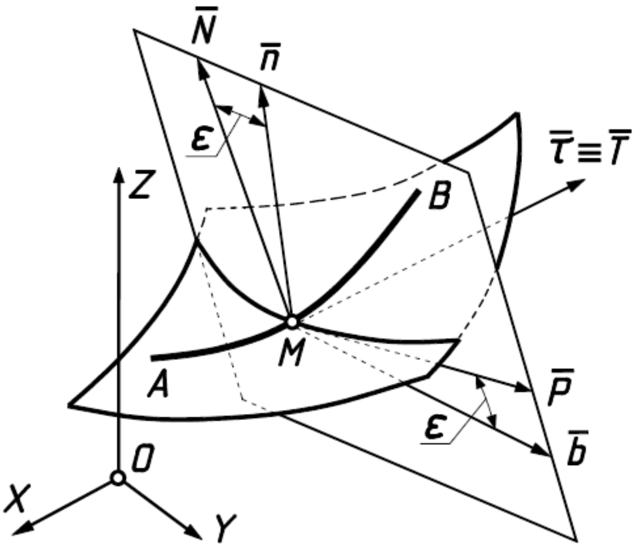
$$\frac{dV}{dt} = g(\sin\beta - f\cos\beta). \tag{1.51}$$

Із (1.51) випливає, що швидкість змінюється за лінійним законом, тобто прискорення є сталим. Частинка може або розганятися, або гальмуватися в залежності від величини кута β. Якщо поставити умову, щоб частинка рухалася із сталою швидкістю (V=*const*), то із (1.51) отримуємо:

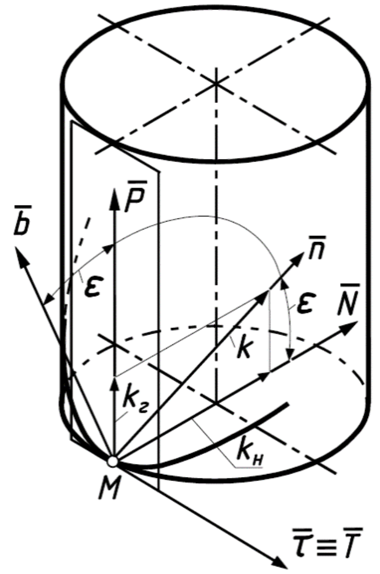
$$f = \mathrm{tg}\,\beta. \tag{1.51}$$

Це відомий результат, який вказує на те, що кут нахилу площини має бути рівний кутові тертя.

Розглянемо загальний випадок, коли траєкторія руху частинки не є геодезичною лінією поверхні. В такому випадку між ортом тригранника $\bar{n}$ і нормаллю до поверхні $\bar{N}$ існує кут ε (див. рис. 1.8,а). Обидва ці вектори розташовані в нормальній до кривої AB площині. Якщо нормаль $\bar{N}$ взяти за орт нового тригранника, другий орт $\bar{T}$ сумістити із ортом дотичної $\bar{\tau}$, а третій орт $\bar{P}$ спрямувати так, щоб він був перпендикулярний до перших двох, то утвориться тригранник Дарбу. Орти $\bar{T}$ і $\bar{P}$ утворять площину, дотичну до поверхні в точці M.



а)



б)

Рис. 1.8. Взаємне положення тригранників Френе і Дарбу із суміщеними вершинами в точці M траєкторії:

а) тригранники в точці M траєкторії AB на нелінійчатій поверхні;

б) тригранники в точці M траєкторії циліндричної поверхні

Між ортами $\bar{b}$ і $\bar{P}$ теж буде кут ε (див. рис. 1.8,а). При русі частинки по кривій на поверхні ці тригранники теж рухаються і кут між ними змінюється (в частковому випадку, коли траєкторією є геодезична лінія, він дорівнює нулю, що було перед цим розглянуто). Як уже було показано раніше, доцентрове прискорення $w_n = V^2 k$ (1.44), тобто воно спрямоване в додатному напрямі орта головної нормалі тригранника Френе. Відповідно і відцентрова сила спрямована вздовж цього орта, але в протилежну сторону (на рис. 1.7 вона позначена $F_в$). Її потрібно спроекціювати на орти $\bar{N}$ і $\bar{P}$ тригранника Дарбу, оскільки складова на орт $\bar{N}$ спричинює реакцію поверхні, а друга складова проекціюється на дотичну до поверхні площину, в якій розташований орт $\bar{P}$.

Під дією цієї і проекцій інших прикладених сил на дотичну площину частинка змушена ковзати по поверхні. Тоді рівняння (1.45) в проекціях на орти тригранника Дарбу запишуться:

$$\begin{gathered} mV\frac{dV}{ds} = m\frac{dV}{dt} = F_T; \\ mV^2 k\cos\varepsilon = R + F_N; \\ mV^2 k\sin\varepsilon = F_P. \end{gathered} \tag{1.53}$$

Запис першого рівняння (1.53) наведено так, щоб показати, що ці рівняння можна вважати або функціями незалежної змінної s – довжини дуги траєкторії, або незалежної змінної t – часу.

В теорії диференціальної геометрії [139] кривину кривої на поверхні розкладають на дві складові. Для демонстрації цього наведено рис. 1.8,б. Кривину k зображають вектором, який лежить у стичній площині кривої. Цей вектор можна спроекціювати на нормаль до поверхні (складова $k_н$) і на дотичну площину до неї (складова $k_г$). Перша складова носить назву нормальної кривини, а друга – геодезичної кривини. Таке розділення важливе, оскільки при згинанні поверхні геодезична кривина залишається незмінною, а змінюється тільки нормальна кривина. Для руху частинки по поверхні таке розділення теж важливе, оскільки дозволяє аналітично визначити дію співвідношення відцентрової сили на рушійну і нормальну складову.

Згідно рис. 1.8,б можна записати вирази геодезичної і нормальної кривини траєкторії через кут ε:

$$k_{\text{г}} = k \sin \varepsilon \, ; \qquad (1.54)$$
$$k_{\text{н}} = k \, cos \, \varepsilon .$$

Рівняння (1.53) із врахуванням (1.54) можна переписати наступним чином:

$$mV \frac{dV}{ds} = F_T ;$$
$$mV^2 k_{\text{н}} = R + F_N ; \qquad (1.55)$$
$$mV^2 k_{\text{г}} = F_P .$$

Рівняння (1.55) записані у функції незалежної змінної – довжини дуги s траєкторії, яка є геометричним параметром. В такому випадку буває зручно всі змінні, що входять до рівнянь (1.55) привести саме до спільного геометричного параметра, яким є незалежна змінна s. Це було показано на прикладі руху частинки по геодезичній лінії, коли диференціальне рівняння руху частинки звелося до першого порядку (1.50). У випадку, коли незалежною змінною є час t, рівнянням руху частинки є диференціальне рівняння другого порядку, оскільки прискоренням руху частинки є друга похідна по часу t. Крім того, геодезична $k_г$ і нормальна $k_н$ кривина визначаються через параметри поверхні в поточній точці. Наприклад, геодезичну кривину в поточній точці можна визначити через геометричні параметри у функції довжини дуги s із наведеного визначника:

$$k_{\text{г}} = \begin{bmatrix} N_x & N_y & N_z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{bmatrix}, \qquad (1.56)$$

де N_x, N_y, N_z – проекції одиничного вектора нормалі $\overline{N}$ до поверхні на осі координат. Цей вектор знаходиться за формулою (1.35) і приводиться до одиничного;
$x', y', z', x'', y'', z''$ – перші і другі похідні параметричних рівнянь траєкторії по параметру s.

Нормальну кривину кривої на поверхні (траєкторії ковзання частинки) теж можна визначити через суто геометричні параметри (через коефіцієнти першої і другої квадратичних форм поверхні).

Із розглянутих прикладів можна зробити висновок, що поряд із традиційним описом руху частинки у функції незалежної змінної, якою є час t, перехід до геометричної незалежної змінної, а саме до довжини шляху s ковзання частинки по поверхні, може призвести до спрощеного знаходження закону її руху.

1.3.2. Складний рух частинки по поверхні

Складний рух частинки — такий її рух, при якому вона одночасно рухається відносно якоїсь системи відліку, а та, у свою чергу, рухається відносно іншої системи відліку. Для аналізу складного руху необхідно враховувати відносний рух (рух точки відносно однієї системи відліку) та переносний рух (рух цієї системи відліку відносно іншої). У наших дослідженнях однією системою відліку є нерухома система координат, а другою – рухома, по відношенню до якої частинка здійснює свій рух. Рух частинки відносно рухомої системи називається відносним, відповідно швидкість та прискорення – теж відносними. Рух рухомої системи відносно нерухомої називається переносним, відповідно швидкість та прискорення частинки в даний момент часу – переносними. Рух частинки відносно нерухомої системи відліку називається абсолютним або складним, а швидкість та прискорення – абсолютними.

Виходить, що частинка по відношенню до систем координат бере участь у двох рухах. Відповідно існує два вектори прискорення. Сумарне або абсолютне прискорення, яке є сумою складових, не завжди визначається геометричною сумою переносного і відносного прискорень. Справа в тому, що поверхня і жорстко прикріплена до неї рухома система координат можуть здійснювати по відношенню до нерухомої принципово різні переміщення. Може бути випадок, коли поверхня здійснює поступальний рух, тобто такий рух, при якому осі жорстко прикріпленої до неї рухомої системи весь час залишаються паралельними відповідним осям нерухомої системи. В іншому випадку цього не відбувається, тобто виникає поворот рухомої системи відносно нерухомої. У цьому випадку виникає ще одне прискорення – Коріоліса або поворотне прискорення, яке є результатом двох рухів з поворотом рухомої системи відносно нерухомої. При поступальному русі поверхні використання рухомої системи координат немає сенсу, оскільки їх осі весь час залишаються паралельними. При цьому прискорення Коріоліса відсутнє. У другому випадку з'являється прискорення Коріоліса, рухома система здійснює певний поворот по відношенню до нерухомої, отже, потрібно аналітично описати зв'язок між рухомою і нерухомою системами, щоб визначити сумарне прискорення, яке по відношенню до нерухомої системи координат називається абсолютним.

У випадку наявності трьох прискорень вектор абсолютного прискорення $\overline{w_a}$ визначається геометричною сумою трьох складових:

$$\overline{w_a} = \overline{w_r} + \overline{w_e} + \overline{w_c}\,, \tag{1.57}$$

де $\overline{w_r}$ – прискорення точки і відносному русі, тобто відносне прискорення;
$\overline{w_e}$ – переносне прискорення;
$\overline{w_c}$ – прискорення Коріоліса.

Векторне рівняння $m\overline{w} = \bar{F}$ із врахуванням (1.57) запишеться;

$$m\overline{w_a} = m\overline{w_r} + \mathrm{m}\overline{w_e} + \mathrm{m}\overline{w_c} = \bar{F}. \tag{1.58}$$

Рівняння (1.58) перепишемо наступним чином:

$$m\overline{w_r} = \bar{F} + (-\mathrm{m}\overline{w_e}) + (-\mathrm{m}\overline{w_c}). \tag{1.59}$$

Знак «мінус» означає, що напрям сили, яка виникає внаслідок прискорення, спрямований в протилежну сторону. Позначимо ці сили наступним чином:

$$-\mathrm{m}\overline{w_e} = J_e;$$
$$-\mathrm{m}\overline{w_c} = J_c. \tag{1.60}$$

Сили (1.60) носять назву переносної і коріолісової сил інерції. З урахуванням них рівняння (1.59) можна записати наступним чином:

$$m\overline{w_r} = \bar{F} + J_e + J_c. \tag{1.61}$$

Векторне рівняння (1.61) описує відносний рух частинки по відношенню до рухомої системи координат. Проекціюючи його на рухому прямокутну систему координат (1.41), отримаємо диференціальні рівняння відносного руху частинки:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x + J_{ex} + J_{cx};$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y + J_{ey} + J_{cy}; \tag{1.62}$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z + J_{ez} + J_{cz}.$$

При практичному використанні рівнянь (1.62) потрібно знати напрям вектора коріолісового прискорення і відповідно, коріолісової сили. Як було зазначено, коріолісове прискорення виникає, якщо рухома система здійснює поворот відносно нерухомої. В такому випадку існує вектор кутової швидкості $\bar{\omega}$. Напрям вектора коріолісового прискорення визначається із векторного добутку:

$$\overline{w_c} = 2\bar{\omega} \times \bar{v_r}. \tag{1.63}$$

Модуль коріолісового прискорення дорівнює подвоєному добутку величини кутової швидкості ω на величину відносної швидкості v_r і на синус кута між векторами вказаних швидкостей. Для знаходження напряму коріолісового прискорення можна застосовувати правило М. Є. Жуковського. В існуючих працях, які будуть розглянуті в наступному підрозділі, саме такий підхід і застосовується. Нами запропоновано дещо спростити знаходження вектора абсолютного прискорення при складному русі частинки. Це досягається наступним чином:

1) віднесення рухомої поверхні до криволінійних координат і додавання двох рухів (відносного в рухомій системі координат і переносного самої рухомої системи). В результаті отримуємо абсолютну траєкторію руху, диференціюванням якої знаходимо як абсолютну швидкість, так і абсолютне прискорення в проекціях на осі нерухомої системи координат;

2) використання в ролі рухомої системи координат супровідного тригранника Френе траєкторії. В такому випадку незалежною змінною є довжина дуги s траєкторії переносного руху тригранника. Це дає можливість застосування формул Френе і отримання вектора абсолютного прискорення в проекціях на орти тригранника. В першому випадку знаходження відносного руху частинки здійснюється в нерухомій системі координат, в другому – у рухомій системі тригранника.

Суть використання в ролі рухомої системи координат тригранника Френе полягає в наступному. Тригранник Френе рухається вздовж кривої *1* – траєкторії переносного руху (див. рис. 1.9). Його положення на кривій залежить від довжини дуги s цієї кривої. Одночасно в системі тригранника рухається частинка по кривій *2*, яка є траєкторією відносного руху. Положення частинки визначається сумою двох векторів: $\bar{r} = \bar{r}(s)$, кінець якого описує траєкторію переносного руху *1*, і $\bar{\rho} = \bar{\rho}(s)$, кінець якого описує траєкторію відносного руху *2* в системі тригранника. Сумарний вектор абсолютного руху запишеться векторною сумою $\bar{R}(s) = \bar{r}(s) + \bar{\rho}(s)$. Вектор $\bar{\rho}(s)$ розпишемо в проекціях на орти тригранника. Після цього радіус-вектор $\bar{R}(s)$, який описує абсолютну траєкторію руху частинки, запишеться:

$$\bar{R}(s) = \bar{r}(s) + \bar{\tau}\rho_\tau(s) + \bar{n}\rho_n(s) + \bar{b}\rho_b(s). \tag{1.64}$$

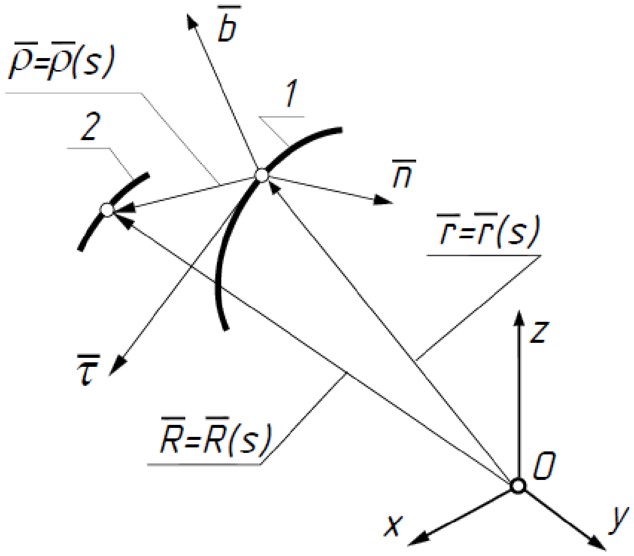


Рис. 1.9. До визначення радіус-вектора абсолютної траєкторії в двох координатних системах: нерухомої *Oxyz* і рухомого тригранника Френе

Диференціювання векторного рівняння (1.64) по змінній s дасть абсолютну швидкість частинки, а наступне диференціювання – абсолютне прискорення. При цьому згідно диференціальної геометрії кривих $\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}$, тобто похідна радіус-вектора кривої по довжині її дуги є орт дотичної. Диференціювання інших виразів, до яких входять орти, відбувається із застосуванням формул Френе:

$$\begin{aligned} \bar{\tau}' &= k\bar{n}; \\ \bar{n}' &= \sigma\bar{b} - k\bar{\tau}; \\ \bar{b}' &= -\sigma\bar{n}. \end{aligned} \tag{1.65}$$

де $k = k(s)$ і $\sigma = \sigma(s)$ – кривина і скрут переносної траєкторії (див. рис. 1.9, крива *1*) відповідно.

Окрім того, що формули Френе відіграють виключно велику роль в диференціальній геометрії, зокрема в теорії просторових кривих. Вони мають кінематичну інтерпретацію, що розглянуто в праці [278]. Прикметно, що визначення вектора абсолютного прискорення відбувається диференціюванням тільки одного векторного рівняння (1.64). В кінцевому підсумку складові прискорення групуються за ортами тригранника, тобто ми їх отримуємо у вигляді проекцій на орти. Теорія застосування тригранника Френе у складному русі точки детально розглянута в праці [265].

1.4. Огляд праць з опису руху частинок по нерухомих і рухомих поверхнях

Не зважаючи на те, що геометричні параметри і диференціальні властивості поверхні відіграють надзвичайно велику роль у формуванні траєкторії частинки при її русі під дією прикладених сил, в прикладній геометрії не так багато робіт з даного напрямку. Здебільшого роботи стосуються кінематичних характеристик руху точки і утворення кривих, зокрема, за допомогою плоских механізмів. У свій час, коли не було комп'ютерних технологій, задача побудови кривих за допомогою таких механізмів була актуальною. Побудові кривих за допомогою механізмів, а також дослідженню траєкторій точок їх ланок присвячені роботи [29, 87, 229]. У працях [86, 316] приведено геометричні способи та геометричне моделювання прискорень ланок просторових механізмів.

Плоскі і просторові механізми були об'єктом дослідження їх кінематичного аналізу та синтезу [59, 259, 255, 257, 258]. Подібними питаннями займалися також професор Пилипака С. Ф. і його учень Бабка В. М. В їх працях йшлося про конструювання ліній та поверхонь переміщенням відрізка за заданими диференціальними умовами руху [214, 215, 282–287, 289].

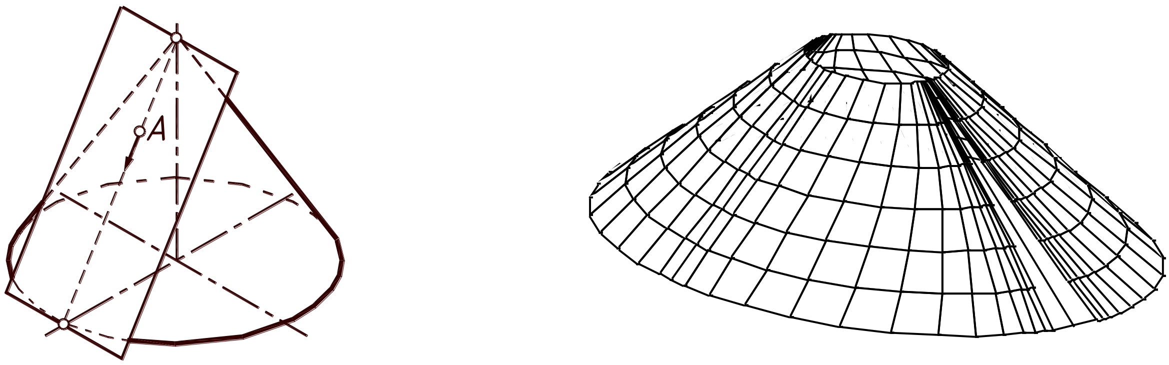
Безпосередньо питаннями руху частинки по шорстких нерухомих поверхнях в прикладній геометрії займався учень професора Пилипаки С. Ф доц. Несвідомін А. В., а по рухомій – учениця професора Підгорного О. Л. Ніколаєва Ю. М., що буде розглянуто детальніше в наступних підрозділах.

1.4.1. Огляд праць з опису руху частинок по нерухомих шорстких поверхнях

Найпростіше описується рух частинки по нерухомій (стаціонарній) поверхні, коли нею є похила площина, а прикладеною силою – вага частинки. Цей результат було отримано в підрозділі 1.3.1 як частковий, коли в системі диференціальних рівнянь руху частинки по циліндричній поверхні (1.48) замість кривої його поперечного перерізу задати пряму лінію. Проте, і в цьому випадку все може бути набагато складніше, бо форма траєкторії руху залежить від початкових умов. Якщо напрям початкової швидкості збігається із лінією найбільшого нахилу площини, то траєкторією руху частинки буде пряма лінія, а якщо не збігається, то траєкторія буде криволінійною. Ця задача розв’язана відомими вченими П. М. Василенком і П. М. Заїкою. Розв’язок цієї задачі в більш спрощеному варіанті отримано в праці [307] завдяки переходу від незалежної змінної часу t до нової геометричної змінної, а саме кута нахилу α дотичної до траєкторії, який ця дотична утворює із віссю абсцис. У праці [300] розглянуто автоматизацію побудови траєкторій на похилій площині за отриманими теоретичними результатами. Якщо частинка рухається по циліндричній поверхні перпендикулярно до її твірних, то задача зводиться до руху частинки по кривій – лінії поперечного перерізу поверхні, яка є для неї геодезичною. В працях [225, 240] розглянута задача знаходження кривої поперечного перерізу циліндра за заданими кінематичними характеристиками руху. Складання диференціальних рівнянь відбувається на орти супровідного тригранника розшукуваної кривої. Усі перераховані задачі аналітичного опису руху частинки по поверхні мають плоску траєкторію. Це спрощує аналітичні викладки, оскільки орт нормалі збігається з головною нормаллю траєкторії і для цього випадку не потрібно розкладати її кривину на геодезичну і нормальну складові (геодезична складова дорівнює нулю).

Перейдемо до випадків, коли траєкторією руху частинки є просторова крива. У праці [237] проаналізовано можливі траєкторії руху частинки під дією сили власної ваги по лінійчатих поверхнях. Показано, що частинка намагається спускатися по поверхні траєкторією, яка є лінією найбільшого нахилу. У розгортних поверхонь однакового нахилу твірних лінія найбільшого нахилу збігається з прямолінійними твірними, тому траєкторіями руху частинок по таких поверхнях є прямолінійні твірні. Прикладом може служити конус із нижньою основою у вигляді кола (див. рис.1.11,а).

Однак у конуса із основою у вигляді еліпса або іншої кривої лініями найбільшого нахилу є криві лінії (див. рис. 1.10,б). Починаючи рух по них, частинка відхиляється від криволінійної лінії найбільшого нахилу під дією відцентрової сили і рух стає непрогнозованим. У такому випадку необхідно складати диференціальні рівняння руху і розв'язувати їх.



а) б)

Рис. 1.10. Графічні ілюстрації до ролі ліній найбільшого нахилу при опусканні частинок по поверхнях:

а) лінії найбільшого нахилу – прямолінійні твірні – є траєкторіями руху частинки;

б) лінії найбільшого нахилу є просторовими кривими і не є траєкторіями руху частинки

Наступна група робіт стосується знаходження просторових траєкторій руху частинки при складанні диференціальних рівнянь на орти рухомого тригранника Дарбу, коли незалежною змінною є довжина траєкторії s і її кривина розкладається на геодезичну і нормальну складові. До них відносяться праці стосовно руху частинок по внутрішній поверхні циліндра і конуса при боковій їх подачі [235, 242], по внутрішній поверхні похилого стаціонарного циліндра [266], по гвинтових поверхнях розгортного [236] і нерозгортного [231] гелікоїдів.

Окремо слід сказати про праці відносно руху частинки по полиці плуга. Хоча плуг і рухається, рух скиби по поверхні полиці не є складним. При складанні рівнянь руху приймається умова, що полиця нерухома, а частинка скиби примусово рухається по його поверхні. Гячев Л. В. у своїх дослідженнях дуже широко залучає теорію диференціальної геометрії поверхонь та пропонує проєктувати полицю за наперед заданою траєкторією руху скиби по її поверхні. При русі скиби по полиці вона піднімається вгору, згинається, перевертається і далі рухається вниз, тобто існує умовна її криволінійна вісь. При збільшенні швидкості руху скиби і частинки зокрема ця вісь змінюється – вона займає на полиці вище положення. Граничною траєкторією цієї осі є геодезична лінія поверхні, вище якої скиба підніматися не буде. Звідси випливає, що для підвищених швидкостей руху скиби, тобто оранки, можна наперед задавати граничну траєкторію руху скиби і проєктувати поверхню так, щоб ця траєкторія була геодезичною лінією. В праці [238] розглянуто приклад побудови геодезичних ліній на лінійчатих поверхнях, а в працях [223, 239, 243] – проєктування полиці плуга за заданою геодезичною лінією – граничною траєкторією руху скиби.

Окремо слід виділити роботи А. В. Несвідоміна стосовно руху частинки по шорстких поверхнях, в тому числі по поверхнях другого порядку [270–274, 299–308]. Пошук траєкторії руху частинки в цих працях здійснюється у внутрішніх координатах поверхні. Рівновага діючих на частинку сил здійснюється в проекціях на орти двох супровідних тригранників траєкторії – Дарбу та тригранника із дотичних до координатних ліній поверхні. За незалежний параметр приймається не тільки час, але і положення частинки на поверхні та напрям її переміщення по ній. В цих працях зроблена орієнтація на комп'ютерні моделі автоматизованого формування законів руху частинки по шорстких поверхнях довільного положення в просторі. Такими поверхнями є: плоскі відсіки; всі лінійчаті та нелінійчаті поверхні 2-го порядку; циліндричні поверхні із ортогональними перерізами у вигляді трансцендентних кривих (спіралі Архімеда, евольвенти кола). Основні результати дослідження із програмним забезпеченням наведені у монографії [275].

Практичного значення розрахунок руху частинки по стаціонарних поверхнях набуває при проєктуванні гравітаційних спусків. Вантаж, який умовно можна прийняти за частинку, рухається вниз по поверхні під дією сили власної ваги. Зазвичай такими поверхнями є гвинтові. Вони займають порівняно невеликий об'єм і використовуються в горнорудній промисловості для сепарування і збагачення руд.

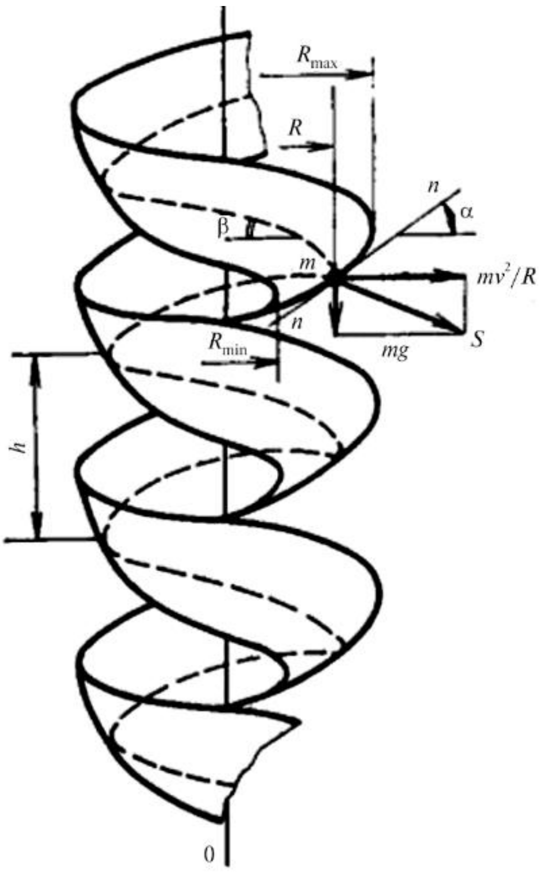


Рис. 1.11. Графічна ілюстрація до гвинтового спуску із позначенням прикладених до частинки сил

Їх розрахунок наведено у відповідній літературі [218]. Однак ці розрахунки здійснюються не на загальних підходах, а для конкретної поверхні, як правило із використанням циліндричної системи координат. Однією змінною є кут α повороту частинки навколо осі гвинтової поверхні, а другою – відстань R від осі поверхні до частинки.

Приклад такого розрахунку із відповідним рисунком наведено в праці Черненко В. Д. (див. рис. 1.11). На ньому позначена сила ваги частинки mg і відцентрова сила $\frac{mV^2}{R}$, однак не позначені сила реакції поверхні і сила тертя. Сила реакції спрямована по нормалі до поверхні, напрям якої можна визначити за формулою (1.35) у випадку, коли поверхня віднесена до криволінійних координат. В даному випадку її потрібно визначати, виходячи із конструктивних параметрів гвинтової поверхні. Якщо траєкторію руху частинки розглядати, як невідому криву на поверхні, утворену функціональною залежністю між внутрішніми криволінійними координатами і прикласти до частинки діючі сили (ваги, реакції поверхні і тертя) за визначеними через криволінійні координати напрямками, то відцентрова сила буде закладена в диференціальні рівняння руху автоматично і не виникне потреби її визначення. Крім того, при такому індивідуальному підході (див. рис. 1.11), визначаються параметри руху після його стабілізації, тобто при сталій швидкості руху частинки.

При загальному підході, який розглянуто в нашій роботі, описується і перехідний процес при розгоні частинки. В працях Сисоєва Н. І. розглянуто рух частинки по поверхні розгортного гелікоїда, де теж застосовано циліндричну систему координат.

1.4.2. Огляд праць з опису руху частинок по рухомих шорстких поверхнях, при русі яких присутній поворот

Рух поверхні може бути як з поворотом (широко застосовуваний обертальний рух навколо нерухомої осі) так і без повороту (поступальний, коли всі точки поверхні описують конгруентні криві). В останньому випадку не виникає прискорення Коріоліса. Обертальний рух дуже поширений в техніці, особливо в сільськогосподарських машинах, в яких відбувається взаємодія технологічного матеріалу із рухомими поверхнями. Відповідно і до досліджень складного руху частинки здебільшого звертались фахівці із механізації сільськогосподарського виробництва. В різний час в Україні вийшло три монографії за авторством академіків УААН, в яких розглядається складний рух частинки (Василенко П. М., Заика П. М., Адамчук В. В.).

Серед представників наукової школи із прикладної геометрії відомі праці учениці професора Підгорного О. Л. Ніколаєвої Ю. М. [276]. Усі праці Ніколаєвої Ю. М. опубліковані в збірці «Прикладна геометрія та інженерна графіка» (до здобуття Україною незалежності – російською мовою). Серед сучасних праць відомі публікації на цю тему представника школи прикладної геометрії професора Пилипаки С. Ф. В його працях [262, 279] та в розділі монографії [281] теоретично обґрунтовано доцільність використання при складному русі точки тригранника Френе в ролі рухомої системи координат та формул Френе. Тригранник Френе рухається вздовж плоскої або просторової напрямної кривої, яка є траєкторією переносного руху. Перехід від відносного руху частинки в системі тригранника до нерухомої системи координат показано в його праці [277]. Запропонований професором Пилипакою С. Ф. підхід застосування тригранника Френе у складному русі частинки знайшов своє застосування у працях [224, 232, 233, 241, 264, 267, 294]. В перерахованих працях незалежною змінною є дугова координата s – довжина дуги переносної траєкторії тригранника.

В інших працях за співавторством професора Пилипаки С. Ф. при розгляді складного руху частинки незалежною змінною є час [118, 288, 295, 310]. Характерною ознакою цих праць є те, що завдяки віднесенню рухомої поверхні до криволінійних координат перед складанням диференціальних рівнянь руху визначається абсолютна траєкторія руху частинки додаванням переносного і відносного рухів. Ця траєкторія описується трьома невідомими функціями (параметричними рівняннями), залежними від часу t. Після розв'язування системи диференціальних рівнянь ці рівняння стають відомими. Такий підхід позбавляє необхідності визначати напрям складових абсолютного прискорення, в тому числі коріолісового, оскільки абсолютне прискорення визначається диференціюванням абсолютної траєкторії. В працях інших авторів зазвичай складаються диференціальні рівняння в проекціях на рухому систему координат, що вимагає визначати окремі складові абсолютного прискорення як по величині, так і за напрямом. Для прикладу покажемо графічні ілюстрації для складання диференціальних рівнянь відносного руху частинки у складному русі, наведені у монографіях Василенка П. М., Заїки П. М., Адамчука В. В.

Наприклад, у монографії Василенка П. М. показано розкладання сил інерції, в тому числі відцентрової сили $\frac{mV^2}{R}$ для частинки, яка розташована на гвинтовій поверхні, що обертається навколо вертикальної осі (див. рис. 1.12).

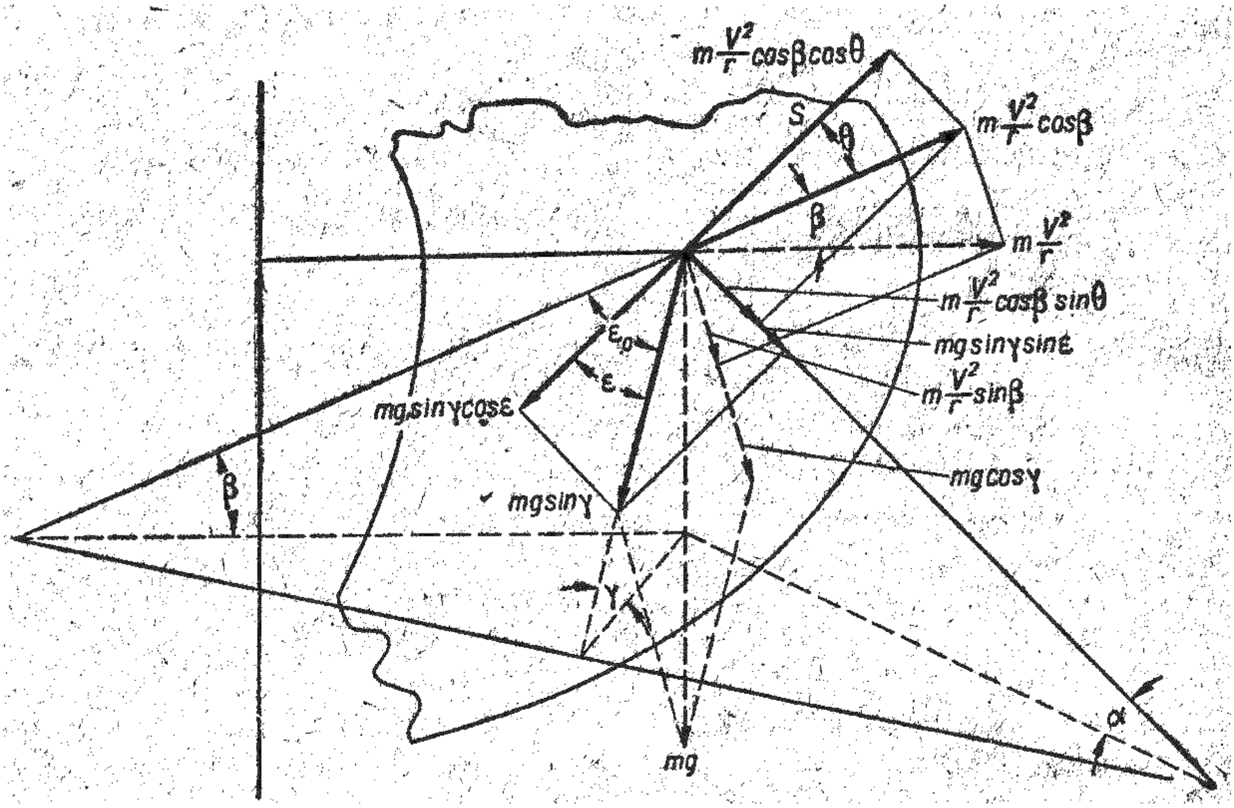


Рис. 1.12. Розкладання сил для частинки на гвинтовій поверхні, яка обертається навколо своєї вертикальної осі

Розкладання сил на орти супровідного тригранника відносної траєкторії здійснено Заїкою П. М. при складанні руху частинки, яка ковзає по гвинтовій лінії всередині горизонтального циліндра. Гвинтова лінія є спільною лінією, вздовж якої всередині циліндра приварено шнек і така конструкція обертається навколо власної осі. Використання супровідного тригранника в даній праці суттєво відрізняється від використання його в працях [279–281]. В працях Заїки П. М. цей тригранник є супровідним не переносної, а відносної траєкторії і використовується як звичайна рухома прямокутна система координат без можливості застосування формул Френе. Між нею і нерухомою декартовою системою встановлюється зв’язок через параметри руху частинки. Положення рухомого тригранника відносно нерухомої системи координат показано на рис. 1.13.

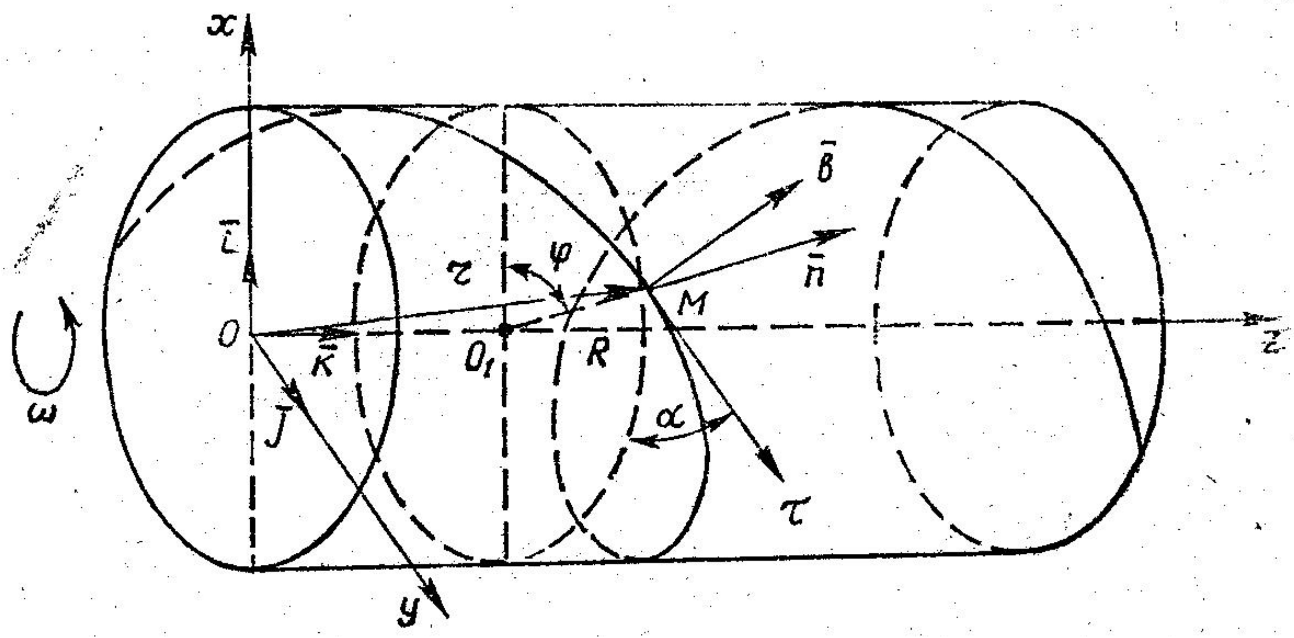


Рис. 1.13. Зв’язок між супровідним тригранником відносної траєкторії і нерухомою системою координат всередині горизонтального циліндра

Адамчуком В. В. здійснено розкладання сил, що діють на частинку, яка рухається по прямій лінії, яка є лінією перетину двох лопаток (див. рис. 1.14). Лопатки нахилені до горизонту під певним кутом і обертаються навколо вертикальної осі. Частинка під дією відцентрової сили змушена рухатися вздовж лопаток вгору, перебуваючи одночасно в контакті з обома ними.

В зазначених працях визначаються складові абсолютного прискорення, далі проекціюються відповідні сили на рухому систему координат для складання диференціальних рівнянь руху частинки. Такий підхід викликає певні труднощі як у визначенні величини і напряму відповідних сил, так і їх проекціюванні на осі рухомої системи координат. Графічні схеми дії сил на частинку теж є складними для розуміння.

Формула $m\bar{w} = \bar{F}$ в загальному випадку описує як простий, так і складний рух. У другому випадку ліворуч від знаку рівності стоїть маса частинки і абсолютне прискорення, а праворуч – прикладені до частинки сили. Такими силами в нашому дослідженні є: сила ваги, реакція поверхні і сила тертя. Визначення абсолютної траєкторії руху частинки в криволінійних координатах дозволяє знайти абсолютне прискорення в проекціях на осі нерухомої системи координат і уникнути знаходження його складових і напряму дії відповідних сил.

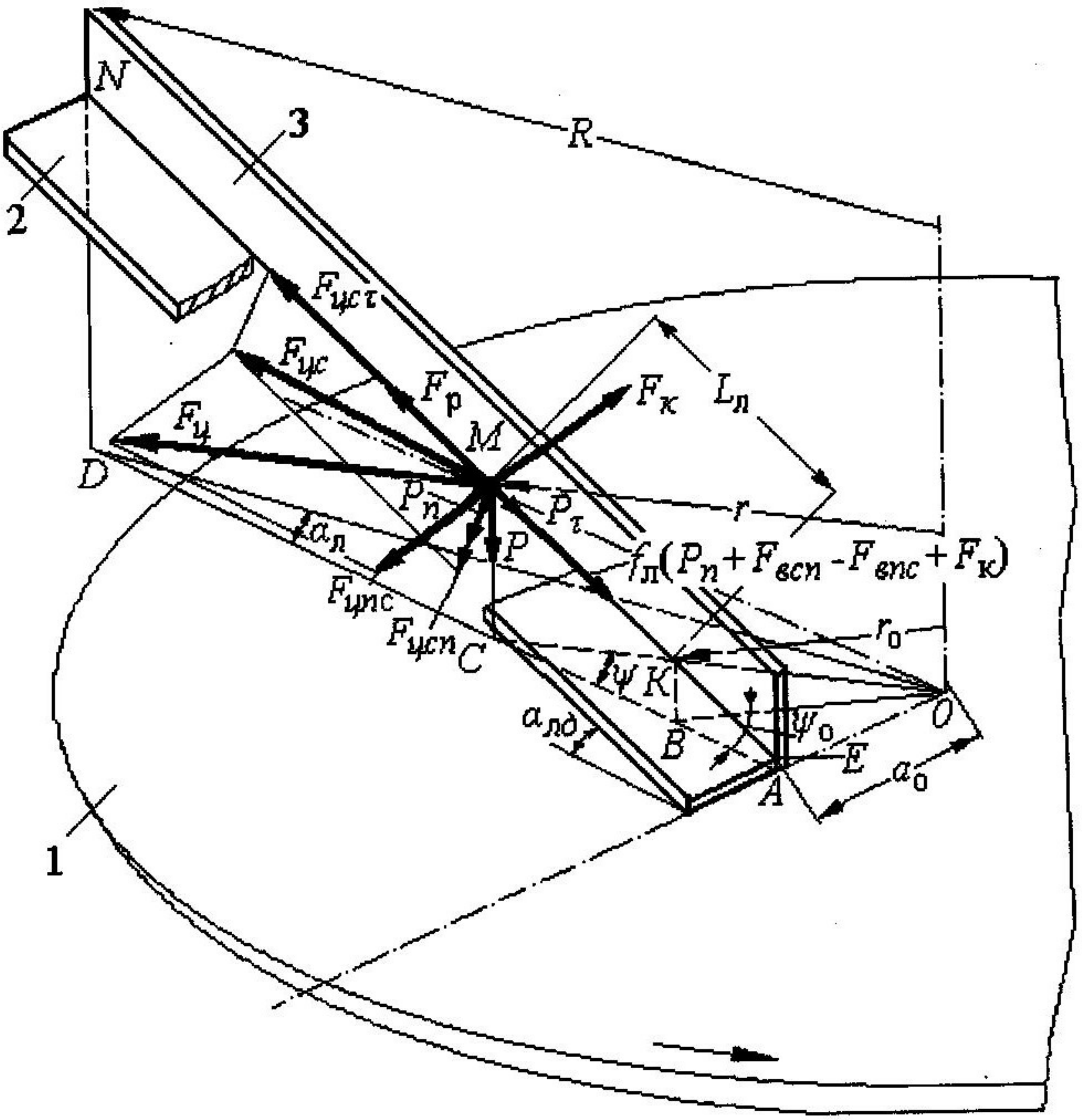


Рис. 1.14. Схема розкладання сил, що діють на частинку, яка ковзає в прямолінійному напрямі по двох нахилених до горизонту лопатках, що обертаються навколо вертикальної осі

Аналітичний опис складного руху частинки стосовно сільськогосподарських машин охоплює багато напрямків. Один із них стосується робочих органів машин для внесення мінеральних добрив [7, 10, 20, 21, 55, 80, 104, 197, 201–206, 208–213, 222]. В інших працях розглянуто різні аспекти взаємодії частинки із рухомими поверхнями сільськогосподарських машин [13, 34, 50, 61, 83, 97, 108, 145, 146, 159, 188, 199, 216, 217, 219, 220, 249, 250, 252, 253, 268, 269, 311, 314]. В праці [153] приведено детальний огляд існуючих експериментальних та обчислювальних досліджень руху гранульованого матеріалу по поверхнях.

1.4.3. Огляд праць з опису руху частинок по рухомих шорстких поверхнях, які здійснюють поступальні коливання

При поступальних коливаннях поверхні всі її точки описують конгруентні криві (або прямі при зворотно-поступальних коливаннях). Поворот поверхні відсутній, отже, відсутнє прискорення Коріоліса при ковзанні частинки. Застосовувати рухому систему координат немає потреби, оскільки осі рухомої і нерухомої системи весь час є паралельними. В існуючих працях в основному розглядається рух частинки по площині, яка здійснює коливальний рух. Похила площина є конструктивним елементом багатьох сільськогосподарських машин. По ній в процесі коливання переміщується оброблюваний матеріал. Найбільш дослідженим є рух частинок по площині, яка здійснює коливання. Заїка П. М. розглянув рух сферичної частинки по горизонтальній площині, всі точки якої описують кола в цій же площині. Задача руху матеріальної частинки по площині, всі точки якої описують кола, вперше була розв’язана М. Є. Жуковським в геометричній інтерпретації, узагальнена і поширена на випадки, коли точки площини описують еліпси, І. І. Блехманом. Заїкою П. М. також розглянуто вібропреміщення частинок технологічного матеріалу. Дослідження руху матеріальної частинки по шорсткій горизонтальній площині, яка здійснює горизонтальні поступальні коливання по різних кривих, розглянуто в праці [234], а по такій, що здійснює вертикальні синусоїдальні коливання, – у праці [9]. В працях [62, 93, 260–262, 297] розглянуто різні варіанти коливання шорсткої площини, в тому числі з нахилом, і ковзання частинки по ній. Стосовно руху частинки по шорстких поверхнях, які здійснюють поступальний коливальний рух, праць дуже мало. Перша з наведених праць [296, 314] написана за участі професора С. Ф. Пилипаки.

Підсумовуючи аналіз праць, які стосуються ковзання частинки по рухомих поверхнях, слід зазначити, що багато із них розв’язуються без єдиного підходу в різних координатних системах. Результати досліджень представлені в основному різноманітними графіками без візуалізації траєкторії ковзання частинки по поверхні. В працях професора С. Ф. Пилипаки започатковано єдиний підхід розв’язування такого роду задач шляхом опису поверхонь параметричними рівняннями і віднесення їх до криволінійних координат. Поєднання методів теоретичної механіки і диференціальної геометрії поверхонь і кривих ліній дозволило по-новому підійти до розв’язування задач аналітичного опису руху частинки по поверхнях.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

1. Приведено відомості з теорії руху матеріальної точки. Викладено основні способи описання руху матеріальної точки: векторний, координатний та природній. Викладено їх основні поняття та формули. Проаналізовано основні підходи до складання диференціальних рівнянь руху точки по рухомих і нерухомих поверхнях. Показано, що незалежною змінною в цих рівняннях може бути час або дугова координата – довжина дуги траєкторії. В деяких випадках саме цей геометричний параметр може вести до спрощення диференціальних рівнянь і їх розв’язку.

2. Праці стосовно ковзання частинки по стаціонарній шорсткій поверхні в основному зводяться до гвинтових поверхонь у ролі гравітаційних спусків, а також використовуються у горнорудній промисловості для сепарування і збагачення руд. При цьому не існує єдиного підходу до складання диференціальних рівнянь руху, використовується циліндрична система координат. Диференціальні рівняння складаються за умови, що рух по гвинтовій поверхні стабілізувався, тобто вони не описують перехідного процесу. Останнім часом науковцями прикладної геометрії запропоновано поверхню описувати параметричними рівняннями і положення частинки на ній визначати криволінійними координатами. Це відноситься праць професора Пилипаки С. Ф. і його учнів, зокрема, доцента Несвідоміна А. В., який вивчав рух частинок по поверхнях другого порядку.

3. При описі переміщення частинки по рухомих поверхнях проаналізовано праці для двох способів руху поверхні: за наявності повороту і без повороту, тобто для поступального руху. У першому випадку диференціальні рівняння руху частинки складаються в проекціях на рухому систему координат, де потрібно враховувати напрям і величину трьох складових абсолютного прискорення, в тому числі прискорення Коріоліса. Такий підхід ускладнює складання диференціальних рівнянь руху із-за визначення напряму і величини кожної складової прискорення і відповідної сили інерції. В другому випадку поверхня здійснює коливальний рух, тобто всі її точки описують конгруентні криві. При такому русі прискорення

Коріоліса відсутнє і відпадає потреба використання рухомої системи. Переважна кількість праць присвячена ковзанню частинки при коливальному русі площини.

4. В роботах останнього часу (Пилипака С. Ф.) для аналітичного опису складного руху частинки по рухомих поверхнях поєднуються методи класичної механіки і диференціальної геометрії кривих і поверхонь. Це проявляється, по-перше, у тому, що віднесення поверхні до криволінійних або внутрішніх координат дає можливість описати абсолютну траєкторію руху частинки геометричним додаванням її відносного і переносного рухів. Абсолютна швидкість і прискорення визначаються послідовним диференціюванням абсолютної траєкторії, при цьому не потрібно визначати напрям і величину кожної складової прискорення, оскільки вони проекціюються на осі нерухомої системи координат. По-друге, в ролі рухомої системи координат запропоновано використовувати супровідний тригранник Френе переносної траєкторії і дугову координату положення тригранника на ній. Це дає можливість застосування широко відомі в диференціальній геометрії формули Френе для знаходження вектора абсолютного прискорення в проекціях на орти цього тригранника. При цьому не потрібно визначати напрям і величину складових прискорення.

5. Застосування геометричних методів дозволяє перейти до більш якісної візуалізації отриманих результатів. Якщо раніше складалися схеми із контурами поверхні і результати відображалися різними залежностями у вигляді графіків, то завдяки віднесенню поверхонь до криволінійних координат з’явилася можливість їх якісної візуалізації і побудови траєкторії ковзання частинки по цих поверхнях.

6. З урахуванням проведеного аналізу праць стосовно руху частинки по поверхні було обрано напрям дослідження з більш широким залученням геометричних методів, зокрема, диференціальної геометрії. Це викликано також тим, що серед науковців прикладної геометрії цій темі було приділено мало уваги, а праці, які з’явилися останніми роками, потребують подальшого розвитку.

РОЗДІЛ 2
АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС РУХУ ЧАСТИНКИ ПО СТАЦІОНАРНИХ ГВИНТОВИХ ПОВЕРХНЯХ У ФУНКЦІЇ ЧАСУ

Аналітичний опис руху частинок по стаціонарних поверхнях є важливим для розуміння багатьох фізичних явищ та є достатньо дослідженим [8, 18, 19, 32, 42, 43, 56, 60, 64, 77–79, 82, 99, 115, 121, 134, 135, 156, 254]. З практичної точки зору серед стаціонарних поверхонь на особливу увагу заслуговують гвинтові, оскільки вони широко поширені у якості універсального робочого органу багатьох машин [17, 66, 90, 91, 98, 107, 157]. Наприклад, в гірничорудній промисловості для збагачення корисних копалин використовуються гвинтові сепаратори – пристрої з вертикальним гвинтовим жолобом [218]. В енергетичній галузі гвинтові жолоби знайшли своє використання на теплових електростанціях для транспортування вугілля [35, 81], у харчовій промисловості – для переміщення та перемішування зернової продукції на виробничих лініях [40, 144, 268, 313], в будівельній галузі – для транспортування цементу та інших будівельних матеріалів на цементних заводах [180, 193, 251] тощо.

Характер руху частинки по гвинтовій поверхні з вертикальним розташуванням осі залежить від форми цієї поверхні – кривої перерізу жолоба вертикальною площиною, яка проходить через вісь гвинтової поверхні. Виведення аналітичних залежностей закону руху дає можливість досліджувати вплив конструктивних параметрів жолоба на режими руху частинок по ньому. Це дозволяє виявити нові закономірності руху частинок в теоретичному плані та допомагає розв’язати широкий ряд прикладних задач – у практичному.

2.1. Аналітичний опис руху частинки по стаціонарній гвинтовій поверхні під дією сили власної ваги

У вертикальній площині системи координат ρOh, яка збігається з площиною Oxz декартової системи координат ($Oh \equiv Oz$, $O\rho \equiv Ox$), параметричні рівняння лінії осьового перерізу у функції незалежної змінної u в загальному випадку мають вигляд:

$$\rho = \rho(u);$$
$$h = h(u). \tag{2.1}$$

Параметричні рівняння гвинтової поверхні з лінією осьового перезіру (2.1) при рівномірному обертальному русі навколо вертикальної осі з одночасним її переміщенням вздовж цієї осі матиме вигляд:

$$X = \rho\ \cos\alpha;$$
$$Y = \rho\ \sin\alpha; \tag{2.2}$$
$$Z = h + b\alpha,$$

де α – кут повороту площини з лінією осьового перерізу (2.1) навколо вертикальної осі $0h$ (друга незалежна змінна поверхні (2.2)), град;

$b = \frac{H}{2\pi}$ – гвинтовий параметр, який залежить від кроку гвинтової поверхні H (стала величина).

У векторному вигляді диференціальне рівняння руху частинки по гвинтовій поверхні (2.2) має загальновідомий вигляд:

$$m\bar{w} = \bar{F}, \tag{2.3}$$

де m – маса частинки, кг;

$\overline{w}\ [x'', y'', z'']$ – вектор абсолютного прискорення;

$\bar{F}$ – результуючий вектор прикладених до частинки сил.

До таких сил відносяться (див. рис. 2.1): сила ваги mg ($g\ = 9{,}81\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$), сила реакції *R* поверхні та сила тертя *F=fR*. Сила реакції *R* спрямована вздовж вектора нормалі $\overline{N}$ до поверхні, а сила тертя – в протилежну сторону ковзання частинки – вектору швидкості її руху (f – коефіцієнт тертя).

Для отримання системи трьох диференціальних рівнянь усі прикладені до частинки сили спроєктуємо на осі нерухомої системи координат *Oxyz*. Векторне рівняння (2.3) розпишемо на осі цієї системи. Для складання рівнянь необхідно знати одиничні вектори, що задають напрямок прикладених сил.

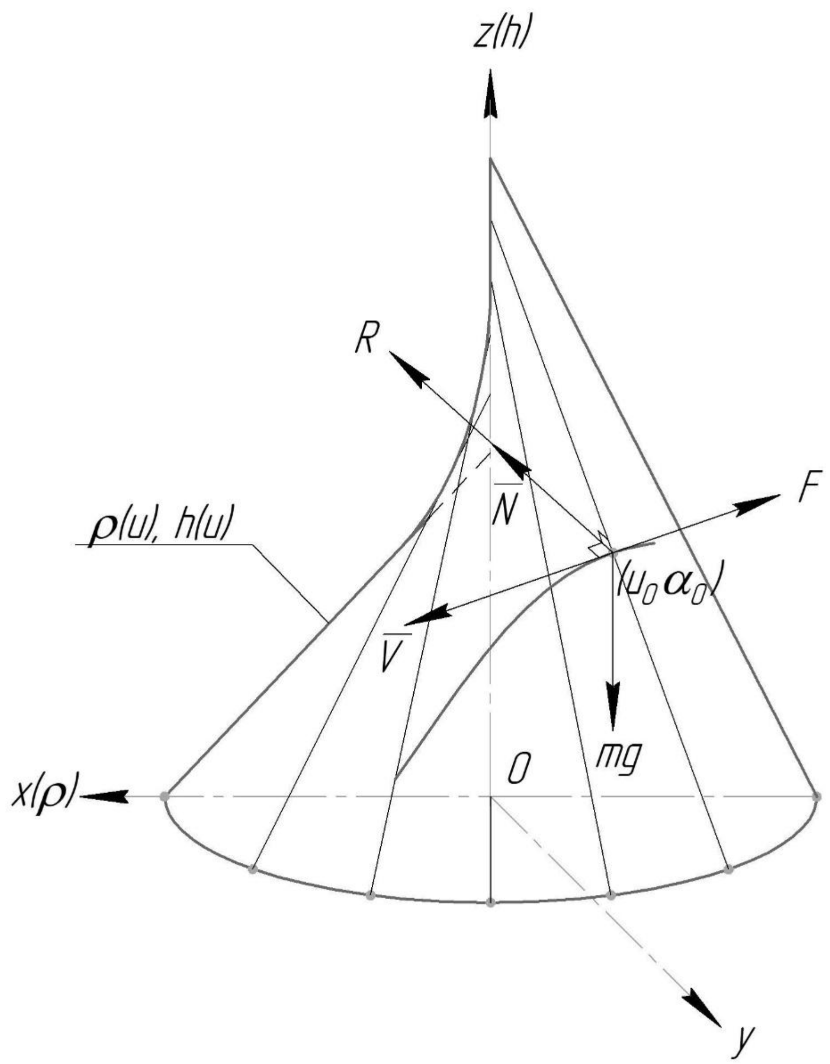


Рис. 2.1. Траєкторія частинки на поверхні на прикладені до неї сили

Сила ваги частинки mg спрямована у протилежну сторону напрямку вертикальної осі. Її одиничний вектор запишеться:

$$[0; \quad 0; \quad -1]. \tag{2.4}$$

Координати вектора $\overline{N}$ нормалі до поверхні визначимо як векторний добуток векторів, дотичних до її координатних ліній. Проекціями цих векторів є часткові похідні першого порядку поверхні (2.2):

$$X_u = \rho_u^{'}\cos\alpha; \quad Y_u = \rho_u^{'}\sin\alpha; \quad Z_u = h_u^{'};$$
$$X_\alpha = -\rho\sin\alpha; \quad Y_\alpha = \rho\cos\alpha; \quad Z_\alpha = b. \tag{2.5}$$

У рівняннях (2.5) нижнім індексом позначена змінна, по якій проводиться диференціювання.

Напрямок вектора $\overline{N}$ нормалі до поверхні (2.2) змінюється на протилежний, якщо у визначнику векторного добутку рядки (2.5) поміняти місцями. Проекція на вісь *Oh* вектора $\overline{N}$ нормалі має бути позитивною, що відповідає фізичній суті процесу.

Координати вектора нормалі до гвинтової поверхні є векторним добутком (2.5):

$$\overline{N} = \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_\alpha & Y_\alpha & Z_\alpha \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} Y_u Z_\alpha - Z_u Y_\alpha; \\ Z_u X_\alpha - X_u Z_\alpha; \\ X_u Y_\alpha - Y_u X_\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b\rho_u^{'}\sin\alpha - \rho h_u^{'}\cos\alpha; \\ -b\rho_u^{'}\cos\alpha - \rho h_u^{'}\sin\alpha; \\ \rho\rho_u^{'} \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Результатом приведення вектора нормалі (2.6) до одиничного є напрямні косинуси:

$$N_x = \frac{b\rho_u^{'}\sin\alpha - \rho h_u^{'}\cos\alpha}{\sqrt{\rho^2\left(\rho_u^{'2} + h_u^{'2}\right) + b^2\rho_u^{'2}}};$$
$$N_y = -\frac{b\rho_u^{'}\cos\alpha + \rho h_u^{'}\sin\alpha}{\sqrt{\rho^2\left(\rho_u^{'2} + h_u^{'2}\right) + b^2\rho_u^{'2}}}; \tag{2.7}$$
$$N_z = \frac{\rho\rho_u^{'}}{\sqrt{\rho^2\left(\rho_u^{'2} + h_u^{'2}\right) + b^2\rho_u^{'2}}}.$$

Для утворення лінії на гвинтовій поверхні (шуканої траєкторії руху частинки) необхідно незалежні змінні u і α поверхні (2.2) пов’язати між собою за допомогою третьої змінної – часу t: $u=u(t)$, $\alpha=\alpha(t)$. При цьому рівняння гвинтової поверхні (2.2) і шуканої траєкторії частинки на цій поверхні схожі. У рівняннях поверхні незалежними змінними є дві – u і α, а в рівняннях траєкторії частинки – одна t. Для того, щоб розрізняти ці рівняння (зокрема, у випадку, коли вони повністю збігаються), координати точок поверхні було прийнято у вигляді великих літер $(X; Y; Z)$, а точок траєкторії частинки на поверхні – малих $(x; y; z)$.

Проекції швидкості руху частинки по гвинтовій поверхні знаходимо шляхом диференціювання параметричних рівнянь поверхні (2.2) з урахуванням взаємозв’язку двох незалежних змінних поверхні u і α через третю змінну – t:

$$\begin{aligned} x' &= \rho_u' u' \cos\alpha - \rho\alpha' \sin\alpha; \\ y' &= \rho_u' u' \sin\alpha + \rho\alpha' \cos\alpha; \\ z' &= h_u' u' + b\alpha'. \end{aligned} \tag{2.8}$$

У рівняннях (2.8) похідні по змінній u позначено відповідним нижнім індексом, а похідні по часу t наведено без позначення індексом.

Швидкість руху частинки по гвинтовій поверхні має вигляд:

$$V = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\alpha'^2(\rho^2 + b^2) + 2bh_u' u'\alpha' + u'^2\left(h_u'^2 + \rho_u'^2\right)}. \tag{2.9}$$

Приведемо вектор швидкості руху частинки до одиничного вектора діленням проекцій швидкості (2.8) на її величину (2.9):

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{\rho_u' u' \cos\alpha - \rho\alpha' \sin\alpha}{\sqrt{\alpha'^2(\rho^2 + b^2) + 2bh_u' u'\alpha' + u'^2\left(h_u'^2 + \rho_u'^2\right)}}; \\ T_y &= \frac{\rho_u' u' \sin\alpha + \rho\alpha' \cos\alpha}{\sqrt{\alpha'^2(\rho^2 + b^2) + 2bh_u' u'\alpha' + u'^2\left(h_u'^2 + \rho_u'^2\right)}}; \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$T_z = \frac{h'_u u' + b\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2(\rho^2 + b^2) + 2bh'_u u'\alpha' + u'^2\left(h'^2_u + \rho'^2_u\right)}}.$$

Проекції прискорення частинки, як другі похідні рівнянь її траєкторії, отримаємо диференціювання виразів (2.10):

$$\begin{aligned}
&x'' = (\rho'_u u'' + \rho''_u u'^2 - \rho\alpha'^2)\cos\alpha - (\rho\alpha'' + 2\rho'_u u'\alpha')\sin\alpha;\\
&y'' = (\rho'_u u'' + \rho''_u u'^2 - \rho\alpha'^2)\sin\alpha + (\rho\alpha'' + 2\rho'_u u'\alpha')\cos\alpha;\\
&z'' = h''_u u'^2 + h'_u u'' + b\alpha''.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Враховуючи наведені вище вирази, векторне рівняння (2.3) в проекціях на осі нерухомої системи координат *Oxyz* матиме вигляд:

$$\begin{aligned}
mx'' &= -fRT_x + RN_x;\\
my'' &= -fRT_y + RN_y;\\
mz'' &= -fRT_z + RN_z - mg.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Підстановкою у рівняння (2.12) напрямних косинусів (2.7) і (2.10) та других похідних (2.11) отримаємо систему диференціальних рівнянь руху частинки по гвинтовій поверхні. Розв’язок отриманої системи відносно невідомих функцій $\alpha'' = \alpha''(t), u'' = u''(t)$ та *R=R(t)* має вигляд:

$$\begin{aligned}
\alpha'' = -\left(\frac{\alpha' f\rho}{AV} + \frac{b\rho'_u}{A^2}\right)\left(\alpha'^2\rho h'_u + g\rho'_u + u'^2 B\right) +\\
+2\alpha' u'\rho'_u\left[\frac{\alpha' f b\rho'_u}{AV} - \frac{\rho}{A^2}\left(\rho'^2_u + h'^2_u\right)\right];
\end{aligned} \tag{2.13}$$

$$u'' = u'^2\left[\frac{u' f\rho B}{AV} - \frac{\rho^2\left(\rho''_u\rho'_u + h''_u h'_u\right) + b^2\rho''_u\rho'_u}{A^2}\right] +$$

$$+\left(\frac{\rho h_u'}{A^2}+\frac{u'f\rho_u'}{AV}\right)(2b\alpha'u'\rho_u'-g\rho)+\alpha'^2\rho\left[\frac{\rho_u'(\rho^2+b^2)}{A^2}-\frac{u'f\rho h_u'}{AV}\right];$$

$$R=\frac{m}{A}\left[\alpha'^2\rho^2h_u'-2b\alpha'u'\rho_u'^2+\rho(g\rho_u'-u'^2B)\right],$$

де V – швидкість (2.9) руху частинки, м/с;

A, B – вирази, що повторюються:

$$A=\sqrt{\rho^2h_u'^2+\rho_u'^2(\rho^2+b^2)};\qquad (2.14)$$

$$B=h_u'\rho_u''-h_u''\rho_u'.$$

Інтегруванням перших двох рівнянь отриманої системи (2.13) знаходимо залежності $\alpha=\alpha(t)$ та $u=u(t)$. Реакцію поверхні R визначаємо з цих розв'язків.

Розв'язання системи диференціальних рівнянь (2.13) дає можливість знайти необхідні характеристики руху частинки: траєкторію, швидкість і реакцію поверхні. Підстановкою у рівняння (2.14) та (2.9), а після цього в рівняння (2.13) рівнянь іншої лінії осьового перерізу (2.1) гвинтової поверхні (2.2) отримаємо відповідні характеристики руху частинки по ній.

2.2. Рух частинки по поверхні косого гелікоїда

В окремому випадку, коли обидва рівняння (2.1) є лінійними, вони опишуть пряму лінію – прямолінійну твірну гвинтової поверхні. Якщо ця пряма нахилена до горизонтальної площини під кутом β, то утвореною поверхнею буде косий гелікоїд, який використовується в якості робочого органу в екструдерах, шнекових насосах, шнекових бурових установках, у м'ясопереробному обладнанні. Рівняння (2.1) матимуть вигляд:

$$\rho=u\cos\beta;\ h=u\sin\beta.\qquad (2.15)$$

У рівняннях (2.15) незалежна змінна поверхні u має фізичний зміст: вона є довжиною прямолінійної твірної косого гелікоїда, причому точка відліку знаходиться на його осі.

Перші і другі похідні рівнянь (2.15) по змінній u мають вигляд:

$$\begin{gathered} \rho_u' = \cos\beta; \qquad h_u' = \sin\beta; \\ \rho_u'' = 0; \qquad h_u'' = 0. \end{gathered} \tag{2.16}$$

Підставимо вирази (2.15) та (2.16) у формулу для визначення швидкості частинки (2.9) та у вирази (2.14):

$$\begin{gathered} V = \sqrt{\alpha'^2(u^2\cos^2\beta + b^2) + 2bu'\alpha'\sin\beta + u'^2}; \\ A = \cos\beta\sqrt{u^2 + b^2}; \\ B = 0. \end{gathered} \tag{2.17}$$

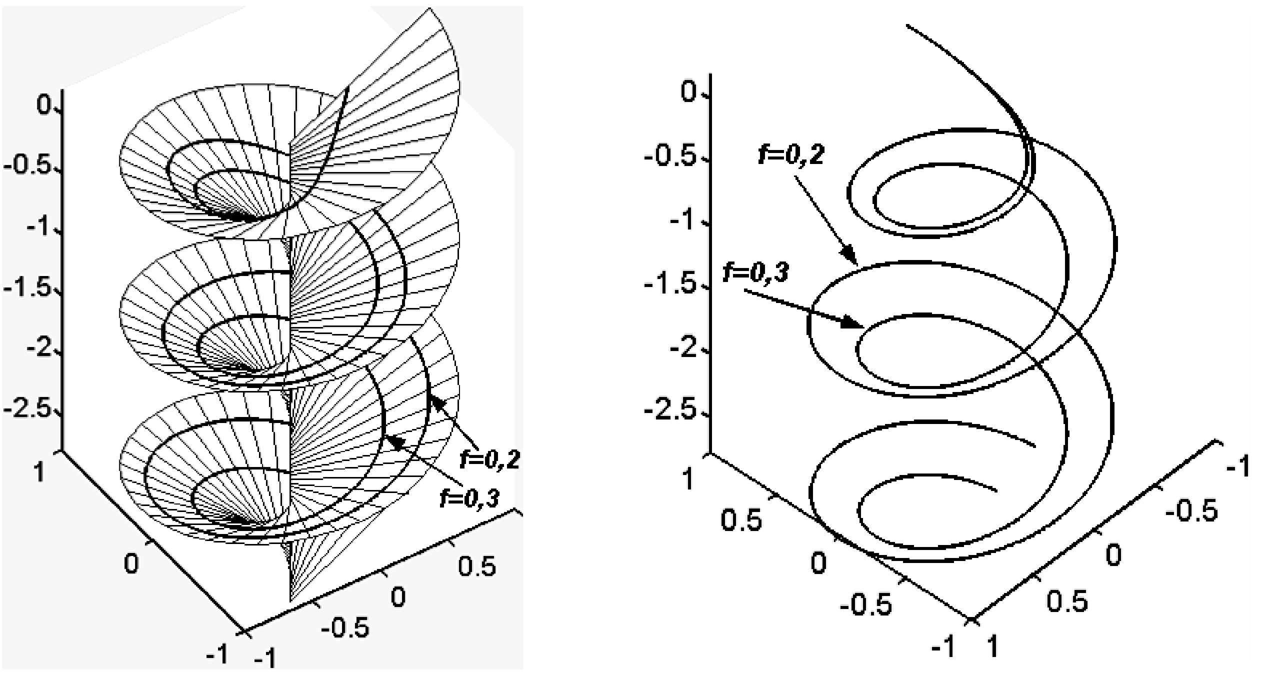
Система диференціальних рівнянь, що описує рух частинки по поверхні косого гелікоїда, є результатом підстановки виразів (2.15), (2.16) та (2.17) у (2.13):

$$\begin{gathered} \alpha'' = -\left(\frac{\alpha' f u\cos\beta}{V\sqrt{u^2 + b^2}} + \frac{b}{u^2 + b^2}\right)(\alpha'^2 u\sin\beta + g) + \\ +2\alpha' u'\left(\frac{\alpha' f b\cos\beta}{V\sqrt{u^2 + b^2}} - \frac{u}{u^2 + b^2}\right); \\ u'' = \alpha'^2 u\left(\frac{u^2\cos^2\beta + b^2}{u^2 + b^2} - \frac{uu' f\cos\beta\sin\beta}{V\sqrt{u^2 + b^2}}\right) + \\ +\left(\frac{f u'\cos\beta}{V\sqrt{u^2 + b^2}} + \frac{u\sin\beta}{u^2 + b^2}\right)(2b\alpha' u' - gu); \\ R = \frac{m\cos\beta}{\sqrt{u^2 + b^2}}(\alpha'^2 u^2\sin\beta - 2b\alpha' u' + gu). \end{gathered} \tag{2.18}$$

Розглянемо приклад. Приймемо гвинтовий параметр косого гелікоїда $b=0,2$ *м* та кут нахилу його твірної до горизонтальної площини $\beta = \frac{\pi}{6}$. Частинка подавалася на поверхню з нульовою початковою швидкістю ($V_0=0$ *м/с*) в точку, віддалену від його осі вздовж прямолінійної твірної на відстань *0,5 м* ($u_0=0,5$ *м*) або на відстань $\rho_0=u_0\cos\beta=0,43$ *м* вздовж перпендикуляру до осі гелікоїда. Початкова швидкість була прийнята нульовою з огляду на те, що її величина впливає лише на тривалість перехідного процесу руху частинки, а її траєкторія після стабілізації руху лишається незмінною.

Розв’язання системи (2.18) здійснювалося чисельними методами за допомогою пакета «Simulink» програмного продукту «MatLab» [94].

У початковий момент руху частинки напрямок її швидкості збігається з лінією найбільшого нахилу поверхні (див. рис. 2.2, а).



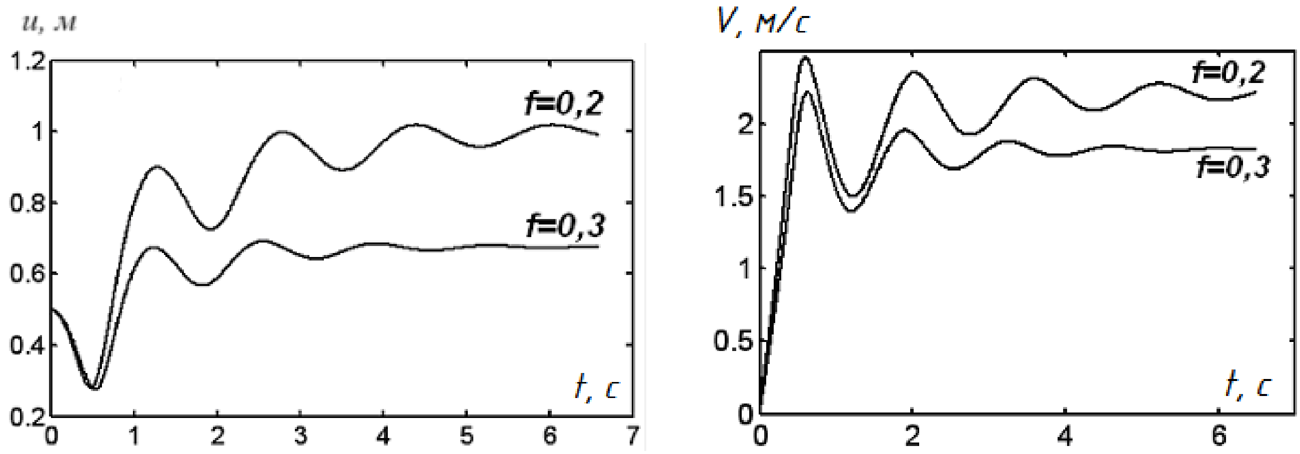
а) б)

Рис. 2.2. Траєкторії руху частинок з різним коефіцієнтом тертя по поверхні косого гелікоїда:

а) поверхня видима;

б) поверхню не відображено

На рис. 2.3 наведені графіки зміни відстані $u=u(t)$ та швидкості $V=V(t)$. З них видно, що з часом t рух частинки по поверхні стабілізується і ці величини наближаються до постійних значень: $u=const$, $V=const$. При цьому віддалення частинки від осі поверхні та її швидкість залежать від коефіцієнта тертя f: збільшення коефіцієнта тертя призводить до зменшення швидкості та віддалення траєкторії частинки від осі поверхні.



а) б)

Рис. 2.3. Графіки, що характеризують рух частинок з різним коефіцієнтом тертя по поверхні косого гелікоїда:

а) зміна відстані $u=u(t)$ від осі косого гелікоїда вздовж його твірної;

б) зміна швидкості $V=V(t)$ руху частинки

Зазначимо, що кінематичні характеристики руху частинки після його стабілізації можуть бути знайдені аналітично. Кутове прискорення $\alpha' = \omega$, швидкість V і відстань u з часом стабілізуються, отже, $\alpha'' = 0, u'' = u' = 0$. Підстановка цих значень у перше рівняння системи (2.18) дає рівність нулю добутку перших двох виразів у дужках. Вираз у других дужках не може дорівнювати нулю, тому прирівняємо до нуля першу дужку:

$$fu\cos\beta\sqrt{u^2+b^2} + b\sqrt{u^2\cos^2\beta + b^2} = 0. \tag{2.19}$$

Розв'яжемо рівняння (2.19) відносно u:

$$u = \frac{b}{\sqrt{2}f}\sqrt{1 - f^2 + \sqrt{\frac{4f^2}{\cos^2\beta} + (1 - f^2)^2}}. \tag{2.20}$$

При прийнятих параметрах поверхні ($b=0,2$ *м*, $\beta = \frac{\pi}{6}$) та коефіцієнті тертя $f=0,2$ за формулою (2.20) отримуємо значення: $u=1$ *м*, а при коефіцієнті тертя $f=0,3$ – $u=0,68$ *м*. Ці результати повністю узгоджуються з величинами, до яких наближається відстань u на відповідному графіку (див. рис. 2.3, а).

Вираз кутової швидкості обертання ω частинки знаходимо за допомогою другого рівняння системи (2.18):

$$\omega = \sqrt{\frac{gu\,\sin\beta}{u^2\cos^2\beta + b^2}}. \tag{2.21}$$

Величину кутової швидкості отримуємо підстановкою у (2.21) значень, знайдених за виразом (2.20). Для частинок з коефіцієнтом тертя $f=0,2$ вона становить $2,5$ c^{-1}, а з коефіцієнтом тертя $f=0,3$ – $2,9$ c^{-1}.

Швидкість V руху частинки знаходимо за першим рівнянням (2.17). Після стабілізації руху вона набуває вигляду:

$$V = \omega\sqrt{u^2\cos^2\beta + b^2}. \tag{2.22}$$

За формулою (2.22) було отримано дві величини швидкості для відповідних коефіцієнтів тертя: *2,2 м/с* і *1,8 м/с*, що теж цілком узгоджується з графічними залежностями швидкості (див. рис. 2.3,б).

З третього рівняння (2.18) нормальна реакція R при стабілізації руху частинки також набуває сталого значення:

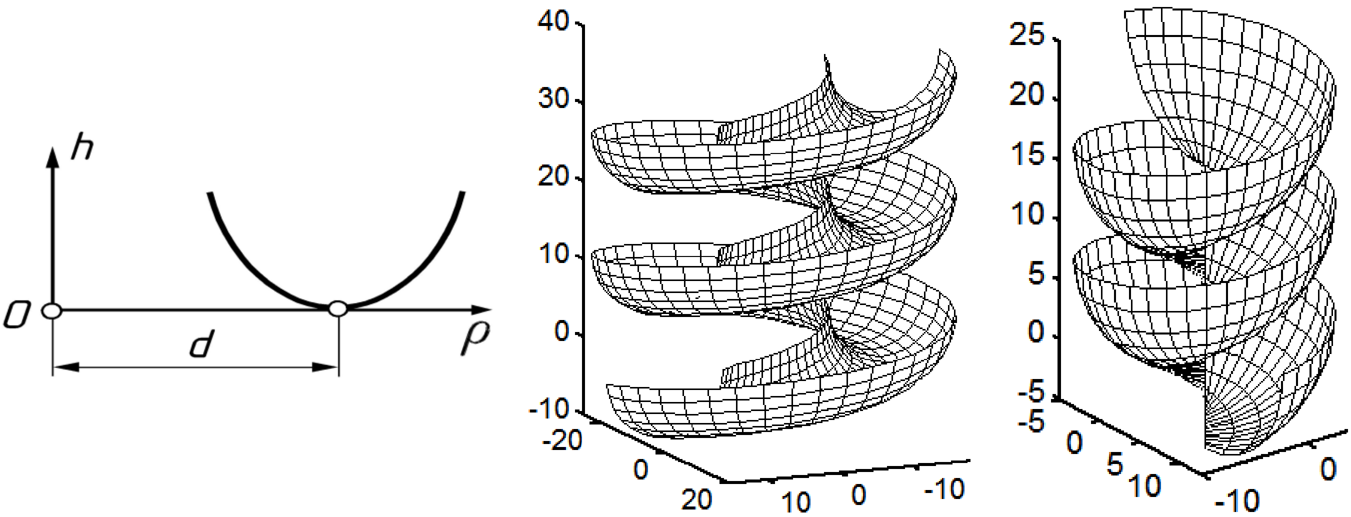
$$R = \frac{m\cos\beta}{\sqrt{u^2 + b^2}}(\omega^2 u^2 \sin\beta + gu). \tag{2.23}$$

2.3. Рух частинки по поверхні, утвореній гвинтовим рухом півкола

Гвинтова поверхня з осьовим перерізом у вигляді півкола є робочим органом шнекових транспортерів для сипучих матеріалів, дозаторів і змішувачів, шнекових пресів та екструдерів, бурових механізмів.

Якщо кривою осьового перерізу гвинтової поверхні є дуга кола радіуса r, зміщена на величину d (див. рис. 2.4,а), то її рівняння (2.1) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \rho &= r\cos u + d; \\ h &= r\sin u. \end{aligned} \tag{2.24}$$



а) б) в)

Рис. 2.4. До утворення гвинтової поверхні за допомогою кривої осьового перерізу:

а) крива осьового перерізу зі зміщенням вздовж осі ρ на величину d;

б) гвинтова поверхня у загальному вигляді;

в) гвинтова поверхня при $d=0$

Координата ρ в для такої поверхні задає відстань від точки на гвинтовій поверхні до її осі.

Для того, щоб рівняння (2.24) описували дугу півкола випуклістю вниз, незалежна змінна u повинна бути у межах $u=\pi...2\pi$.

Підстановкою рівняння півкола (2.24) у рівняння поверхні (2.2) отримуємо гвинтову поверхню, зображену на рис. 2.4,б. При $d=0$ гвинтову поверхню буде описано чвертю кола (при зміні незалежної змінної u в межах $u=1{,}5\pi...2\pi$) (див. рис. 2.4,в).

Для виведення закону руху частинки по поверхні (див. рис. 2.4,б) підставимо перші і другі похідні рівнянь (2.24) за змінною u у рівняння (2.14) та (2.9), а потім в рівняння (2.13). Після спрощень отримаємо систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{gathered}
\alpha'' = -\frac{r}{A}\left(\frac{\alpha' f\rho}{V} - \frac{br\sin u}{A}\right)(\alpha'^2\rho\cos u - g\sin u - ru'^2) + \\
+\frac{2\alpha' u' r^2 \sin u}{A}\left(\frac{\alpha' fb\sin u}{V} + \frac{\rho r}{A}\right); \\
u'' = -\frac{r^2u'^2}{A}\left(\frac{b^2\sin u\cos u}{A} + \frac{u'\rho f}{V}\right) - \\
-\frac{r}{A}\left(\frac{\rho\cos u}{A} - \frac{fu'\sin u}{V}\right)(2br\alpha' u'\sin u + g\rho) - \\
-\frac{\alpha'^2\rho r}{A}\left(\frac{(\rho^2+b^2)\sin u}{A} + \frac{f\rho u'\cos u}{V}\right); \\
R = \frac{mr}{A}\left[\alpha'^2\rho^2\cos u - 2br\alpha' u'\sin^2 u + \rho(ru'^2 - g\sin u)\right],
\end{gathered} \tag{2.25}$$

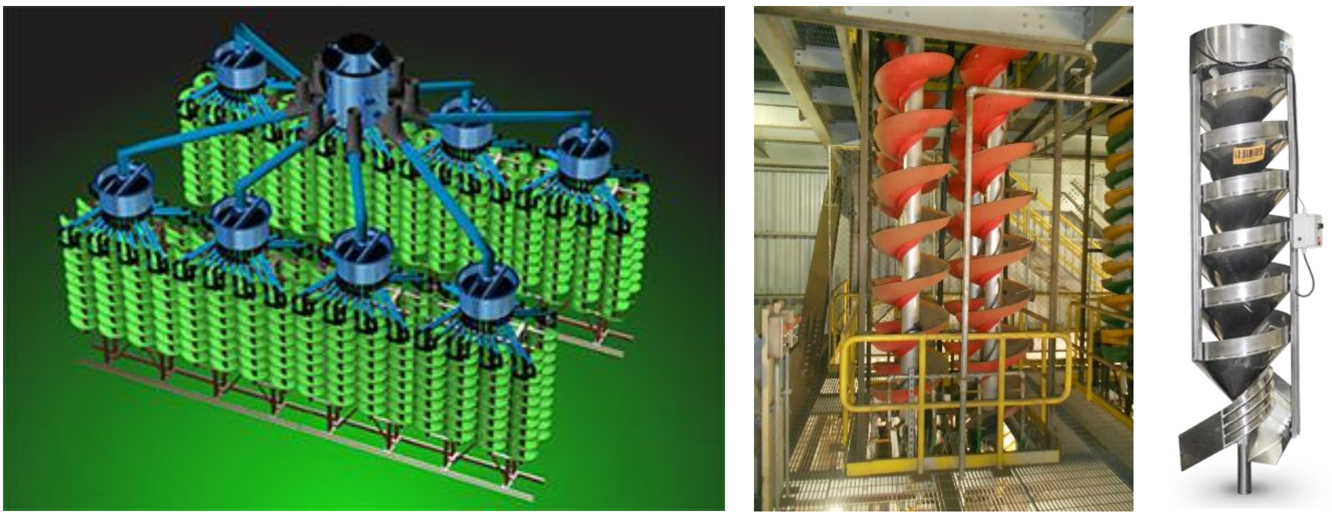
де $\rho = r\cos u + d$;

$A = r\sqrt{\rho^2 + b^2\sin^2 u}$;

$V = \sqrt{\alpha'^2(\rho^2+b^2) + 2br\alpha' u'\cos u + ru'^2}$.

Слід зазначити, що при рівності нулю гвинтового параметру поверхні ($b=0$) система (2.25) опише окремий випадок руху частинки по внутрішній поверхні тора.

Спіральні сепаратори (гравітаційні класифікатори) Multotec HX5, HX7, HX9 (див. рис. 2.5,а), FLSmidth MG Series, Outotec Spiral Concentrator (див. рис. 2.5,б) з діаметром жолоба *300–1200 мм*, довжиною спіралі *2–6 м* та продуктивністю *1–10 т/год* використовуються для розділення сипучих матеріалів (руди, піску, зерна) за густиною під дією відцентрової сили. Машини для обробки насіння (гвинтові сепаратори та елеватори) Cimbria Heid Spiral Separator, Oliver Gravity Separator, Petkus Spiral Classifier (див. рис. 2.5,в) висотою *2–4 м* з діаметром жолоба *500–1000 мм* та продуктивністю *1–10 т/год* використовуються для очищення зерна та насіння, відділення легких домішок та битого зерна. Зерно рухається по спіральному жолобу під дією сили тяжіння, що дозволяє відокремлювати важчі частинки від легших. Відповідно до цього приймаємо радіус жолоба *500 мм* (*r=0,25 м*). Зміщення кривої осьового перерізу від осі поверхні великих жолобів (наприклад, для руди) становить *500 мм* і більше. Тому приймаємо *d=0,5 м*. Гвинтовий параметр поверхні становить від *100 мм* до *1000 мм* (*0,1–1 м*). Для розрахунків приймаємо *b=0,14–0,2 м*.



а) б) в)

Рис. 2.5. Гвинтові сепаратори:

а) гравітаційний класифікатор Multotec HX5, HX7, HX9;

б) гравітаційний класифікатор Outotec Spiral Concentrator;

в) машина для обробки насіння Petkus Spiral Classifier

Спіральні жолоби використовуються в машинах, де важливі зносостійкість і низький коефіцієнт тертя. Для конкретних умов використовують різні матеріали: сталь або алюміній – для міцності, UHMWPE або поліпропілен – для мінімального тертя, композити – для легкості та зносостійкості. Основними матеріалами є наступні (з приведенням коефіцієнтів тертя по сталі):

1. Метали:

- нержавіюча сталь (AISI 304, AISI 316): *0,3–0,6*;
- алюмінієві сплави (наприклад, Al 6061, Al 5052): *0,3–0,4*;

2. Полімери (пластики):

- поліетилен високої молекулярної маси (UHMWPE, PE 1000): *0,1–0,3*;
- поліпропілен (PP): *0,2–0,3*;
- поліамід (PA, наприклад, нейлон-6,6): *0,3–0,4*;

3. Композитні матеріали:

- фіброармований пластик (GFRP, CFRP): *0,2–0,4*;
- гумово-металеві покриття: *0,3–0,5*.

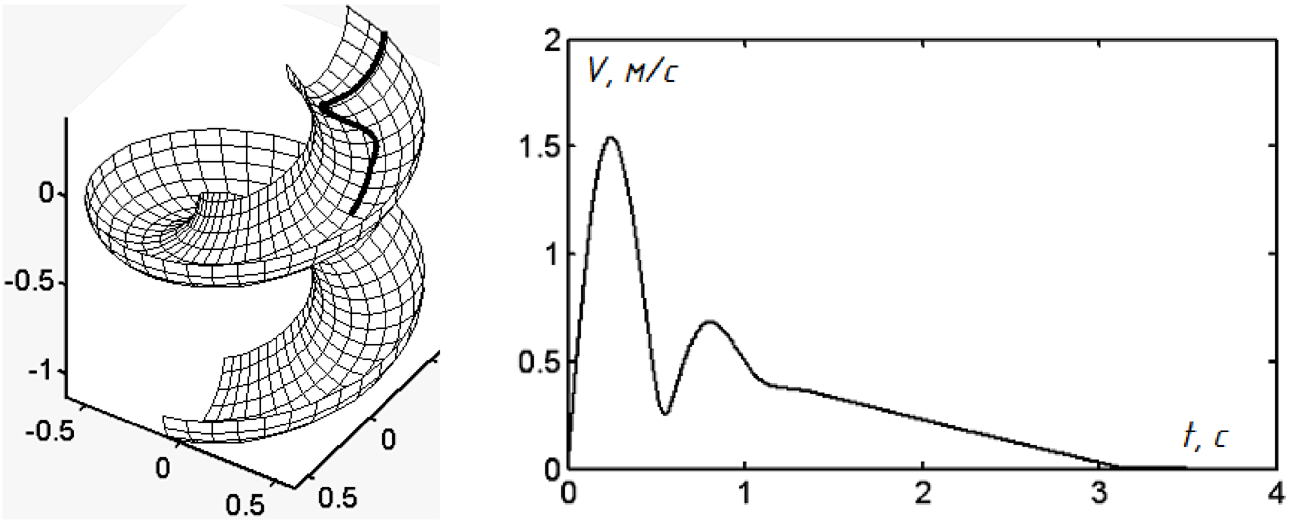
Відповідно до цього приймаємо коефіцієнт тертя f=*0,3*.

Кут φ підйому нижньої гвинтової лінії (дна жолоба) визначатимемо через співвідношення сталих b і d: $tg\varphi = \frac{b}{d}$. Розглядалися три випадки, коли кут φ був менше кута тертя, дорівнював йому і був більше. В усіх трьох випадках частинка подавалася на поверхню в точці на верхній межі жолоба з нульовою початковою швидкістю.

Випадок 1: кут φ підйому дна жолоба менше за кут тертя f.

На рис. 2.6 представлено графічні ілюстрації руху частинки по гвинтовій поверхні для випадку $\frac{b}{d} < f$ – кут φ менше кута тертя при наступних параметрах поверхні: *r=0,25 м, d=0,5, b=0,14*.

Через певний час (*t ≈ 3,2 с*) частинка зупиняється на дні жолоба (див. рис. 2.6,а). Зміна швидкості *V* руху частинки показана на графіку (див. рис. 2.6,б). Для такого випадку рух матеріалу по жолобу неможливий – будуть виникати затори.



а) б)

Рис. 2.6. Рух частинки по жолобу гвинтової поверхні при *r=0,25 м, d=0,5, b=0,14, f=0,3* ($\frac{b}{d} < f$):

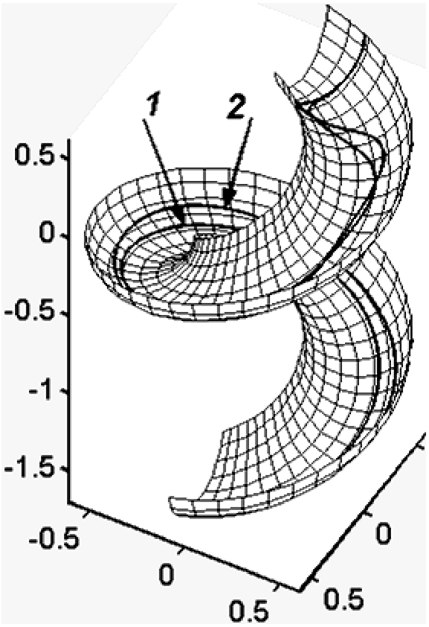
а) траєкторія руху частинки по поверхні;

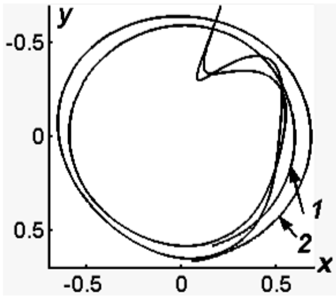
б) графік зміни швидкості *V=V(t)* частинки

<u>Випадок 2: кут *φ* підйому дна жолоба більше за кут тертя *f*.</u>

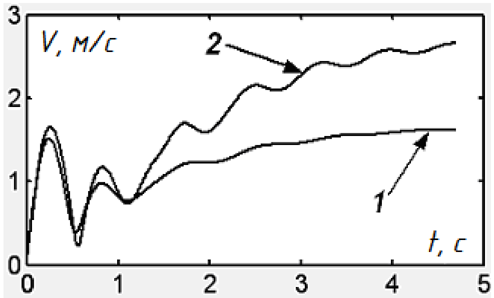
Якщо $\frac{b}{d} > f$ – кут підйому нижньої гвинтової лінії жолоба більше за кут тертя, то рух частинок з часом *t* стабілізується. На рис. 2.7 наведено графічні ілюстрації руху частинок з різними коефіцієнтами тертя по гвинтовій поверхні, побудованій при *r=0,25 м, d=0,5, b=0,2*. Цифрою *1* позначені графіки, що стосуються руху частинки з коефіцієнтом тертя *f=0,3*, а цифрою *2* – графіки, що стосуються руху частинки з коефіцієнтом тертя *f=0,2*.

Траєкторії частинок з різним коефіцієнтом тертя у початковій фазі руху практично збігаються, а потім розділяються і наближаються до гвинтових ліній, розташованих на різній відстані від осі поверхні (див. рис. 2.7,а). На рис. 2.7,б ці траєкторії для більшої наочності показані на вигляді зверху без поверхні. Графіки зміни швидкості (див. рис. 2.7,в) показують, що з часом *t* швидкість *V* руху наближається до сталого значення (при *f=0,3 – V ≈ 1,4 м/с*, при *f=0,2 – V ≈ 2,6 м/с*).





б)



а) в)

Рис. 2.7. Рух частинки по жолобу гвинтової поверхні при *r=0,25 м, d=0,5, b=0,2* ($\frac{b}{d} > f$) для різних коефіцієнтів тертя: *1 – f=0,3, 2 – f=0,2*:

а) траєкторії руху частинки по поверхні;

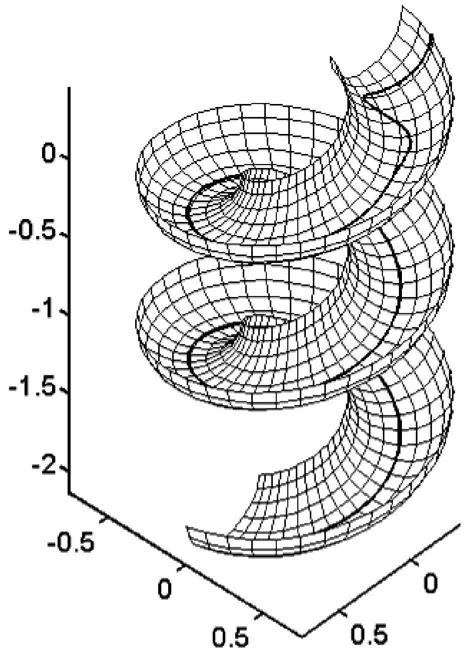
б) горизонтальна проекція траєкторії руху без зображення поверхні;

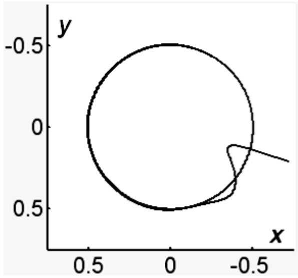
в) графіки зміни швидкості *V=V(t)* частинки

Випадок 3: кут φ підйому дна жолоба дорівнює куту тертя *f*.

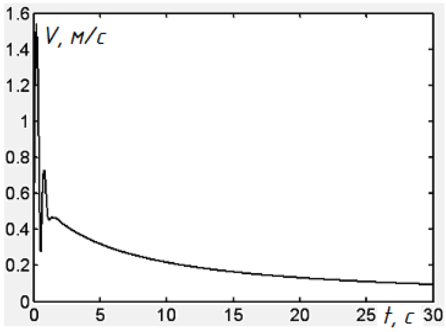
Третій випадок (див. рис. 2.8) є граничним між першим і другим: $\frac{b}{d} = f$ – кут підйому φ нижньої гвинтової лінії жолоба дорівнює куту тертя. Якби лінія дна жолоба була прямою, то частинка рухалася б з постійною швидкістю, як по дну похилого циліндра. Але криволінійна форма дна жолоба змінює характер руху.

Чисельне інтегрування системи диференціальних рівнянь (2.25) при *r=0,25 м, d=0,5, b=0,15, f=0,3* (тобто, при дотриманні умови $\frac{b}{d} = f$) показало, що незалежно від величини і напрямку початкової швидкості траєкторія руху частинки з часом асимптотично наближається до гвинтової лінії – дна жолобу (див. рис. 2.8,а,б). Швидкість руху з часом теж асимптотично наближається до нуля (див. рис. 2.8,в) і частинка рухається нескінченно довго.





б)



а) в)

Рис. 2.8. Рух частинки по жолобу гвинтової поверхні при *r=0,25 м, d=0,5, b=0,15, f=0,3* ($\frac{b}{d} = f$):

а) траєкторія руху частинки по поверхні;

б) горизонтальна проекція траєкторії руху без поверхні;

в) графік зміни швидкості *V=V(t)* частинки

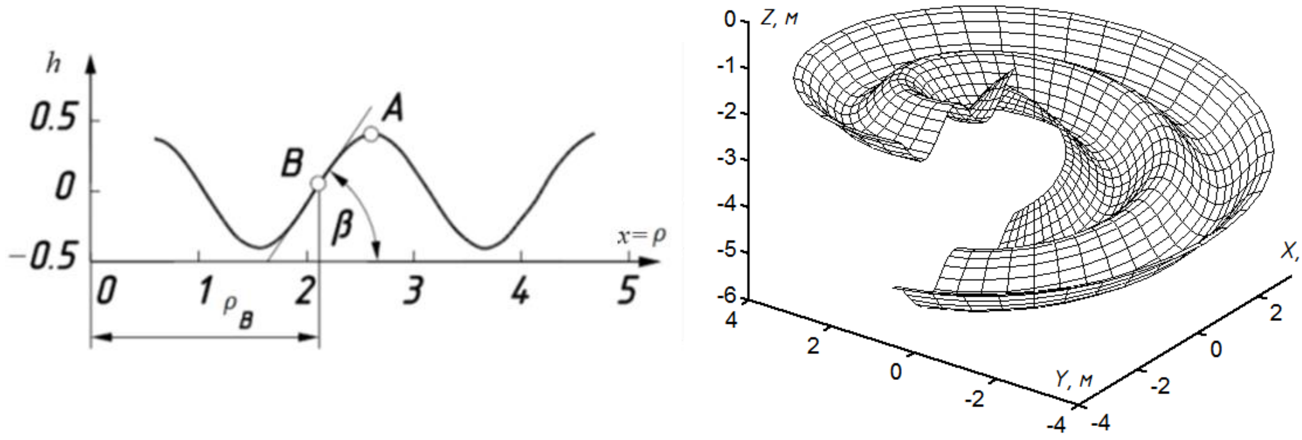
Для кожного випадку можна знайти точний аналітичний розв’язок і визначити кінематичні параметри руху частинки після його стабілізації (аналогічно випадку, розглянутому у підрозділі 2.2).

2.4. Рух частинки по поверхні, утвореній гвинтовим рухом синусоїди

Важливою з практичної точки зору є поверхня, у якої кривою осьового перерізу є синусоїда. Така поверхня складається з однакових жолобів, розташованих на різній відстані від осі поверхні, та відповідає перспективним конструкціям машин для сепарування матеріалів. Для випадку такої поверхні математичні розрахунки приводимо більш детально. Параметричні рівняння (2.1) для випадку синусоїди у системі координат $x0h$ у функції незалежної змінної ρ мають вигляд:

$$x = \rho;$$
$$h = c\ \sin a\rho, \tag{2.26}$$

де c і a – сталі, які задають амплітуду і період (частоту) синусоїди відповідно; ρ – незалежна змінна, яка задає відстань від поточної точки синусоїди до осі $0h$ (див. рис. 2.9,а).



а) б)

Рис. 2.9. Гвинтова поверхня, у якій кривою осьового перерізу є синусоїда:

а) крива осьового перерізу (2.26) при наступних значеннях сталих, що задають відповідно амплітуду і період (частоту) синусоїди: c=0,4, a=3, і зміні відстані ρ в межах ρ=0,2π…1,5π;

б) утворена гвинтова поверхня в межах одного кроку при b=0,5

Для твірної (2.26) рівняння (2.2) гвинтової поверхні матимуть вигляд:

$$X = \rho\ \cos\alpha;$$
$$Y = \rho\ \sin\alpha; \tag{2.27}$$
$$Z = c\ \sin a\rho + b\alpha,$$

де α і b – кут повороту площини з кривою осьового перерізу навколо вертикальної осі та гвинтовий параметр поверхні відповідно.

На рис. 2.9,а побудована дуга синусоїди при *a=3, c=0,4* і зміні відстані ρ в межах *ρ=0,2π…1,5π*, а на рис. 2.9,б – відповідна гвинтова поверхня у межах одного кроку при b*=0,5*.

Похідні першого порядку (2.5) гвинтової поверхні (2.27) з урахуванням того, що її незалежними змінними є ρ та α, набувають вигляду:

$$\begin{aligned} &X'_\rho = \cos\alpha; \quad Y'_\rho = \sin\alpha; \quad Z'_\rho = ac\cos a\rho; \\ &X'_\alpha = -\rho\sin\alpha; \quad Y'_\alpha = \rho\cos\alpha; \quad Z'_\alpha = b. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Векторний добуток (2.6) векторів (2.28) поверхні (2.27) матиме вигляд:

$$\overline{N} = \begin{bmatrix} b\sin\alpha - ac\rho\cos a\rho\cos\alpha; \\ -b\cos\alpha - ac\rho\cos a\rho\sin\alpha; \\ \rho. \end{bmatrix}. \tag{2.29}$$

Відповідно до (2.7) приведемо вектор нормалі (2.29) до одиничного:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{b\sin\alpha - ac\rho\cos a\rho\cos\alpha}{\sqrt{b^2 + \rho^2(1 + a^2c^2\cos^2 a\rho)}}; \\ N_y &= -\frac{b\cos\alpha + ac\rho\cos a\rho\sin\alpha}{\sqrt{b^2 + \rho^2(1 + a^2c^2\cos^2 a\rho)}}; \\ N_z &= \frac{\rho}{\sqrt{b^2 + \rho^2(1 + a^2c^2\cos^2 a\rho)}}. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Зв’яжемо змінні ρ і α між собою за допомогою нової змінної – часу t та отримаємо дві нові залежності: *ρ=ρ(t)* і *α=α(t)*, які задають шукану траєкторію руху частинки. Відповідно до послідовності (2.8) – (2.11) отримаємо наведені нижче вирази.

Проекції швидкості руху частинки по гвинтовій поверхні мають вигляд:

$$\begin{gathered} x' = \rho'\cos\alpha - \rho\alpha'\sin\alpha; \\ y' = \rho'\sin\alpha + \rho\alpha'\cos\alpha; \\ z' = ac\rho'\cos a\rho + b\alpha'. \end{gathered} \qquad (2.31)$$

Величина швидкості V руху частинки по поверхні:

$$V = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2\alpha'^2 + (ac\rho'\cos a\rho + b\alpha')^2}. \qquad (2.32)$$

Одиничний вектор швидкості є результатом ділення проекцій (2.30) на величину швидкості (2.32):

$$\begin{gathered} T_x = \frac{\rho'\cos\alpha - \rho\alpha'\sin\alpha}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\alpha'^2 + (ac\rho'\cos a\rho + b\alpha')^2}}; \\ T_y = \frac{\rho'\sin\alpha + \rho\alpha'\cos\alpha}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\alpha'^2 + (ac\rho'\cos a\rho + b\alpha')^2}}; \\ T_z = \frac{ac\rho'\cos a\rho + b\alpha'}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\alpha'^2 + (ac\rho'\cos a\rho + b\alpha')^2}}. \end{gathered} \qquad (2.33)$$

Диференціюванням виразів проекцій швидкості (2.31) отримаємо прискорення частинки в проекціях на осі координат:

$$\begin{gathered} x'' = (\rho'' - \rho\alpha'^2)\cos\alpha - (\rho\alpha'' + 2\rho'\alpha')\sin\alpha; \\ y'' = (\rho'' - \rho\alpha'^2)\sin\alpha + (\rho\alpha'' + 2\rho'\alpha')\cos\alpha; \\ z'' = ac(\rho''\cos a\rho - a\rho'^2\sin a\rho) + b\alpha''. \end{gathered} \qquad (2.34)$$

Підставимо у (2.12) напрямні косинуси (2.30) і (2.33):

$$mx'' = -\frac{fR(\rho' \cos\alpha - \rho\alpha' \sin\alpha)}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\alpha'^2 + (ac\rho' \cos a\rho + b\alpha')^2}} +$$

$$+R\frac{b\sin\alpha - ac\rho\cos a\rho\cos\alpha}{\sqrt{b^2 + \rho^2(1 + a^2c^2\cos^2 a\rho)}};$$

$$my'' = -\frac{fR(\rho' \sin\alpha + \rho\alpha' \cos\alpha)}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\alpha'^2 + (ac\rho' \cos a\rho + b\alpha')^2}} - \qquad (2.35)$$

$$-R\frac{b\cos\alpha + ac\rho\cos a\rho\sin\alpha}{\sqrt{b^2 + \rho^2(1 + a^2c^2\cos^2 a\rho)}};$$

$$mz'' = -\frac{fR(ac\rho' \cos a\rho + b\alpha')}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\alpha'^2 + (ac\rho' \cos a\rho + b\alpha')^2}} +$$

$$+R\frac{\rho}{\sqrt{b^2 + \rho^2(1 + a^2c^2\cos^2 a\rho)}} - mg.$$

Підставимо у отримані рівняння (2.35) другі похідні (2.34) та отримаємо систему диференціальних рівнянь, що описують рух частинки по гвинтовій поверхні з синусоїдальним перерізом. Розв’яжемо її відносно невідомих функцій $\alpha'' = \alpha''(t), \rho'' = \rho''(t)$ і R=$R(t)$:

$$\alpha'' = \frac{2\alpha'\rho'}{A}\left[\frac{\alpha' fb}{V} - \frac{\rho}{A}(1 + a^2c^2\cos^2 a\rho)\right] -$$

$$-\frac{1}{A}\left(\frac{\alpha' f\rho}{V} + \frac{b}{A}\right)(\alpha'^2\rho ac\cos a\rho - \rho'^2 a^2 c\sin a\rho + g);$$

$$u'' = \frac{\alpha'^2\rho}{A}\left[\frac{\rho^2 + b^2}{A} - \frac{\rho'\rho acf\cos a\rho}{V}\right] + \qquad (2.36)$$

$$+\frac{1}{A}\left(\frac{f\rho'}{V} + \frac{\rho ac\cos a\rho}{A}\right)(2b\alpha'\rho' - g\rho + \rho'^2 a^2 c\sin a\rho);$$

$$R = \frac{m}{A}[\alpha'^2\rho^2 ac\cos a\rho - 2b\alpha'\rho' + \rho(g - \rho'^2 a^2 c\sin a\rho)],$$

де V – швидкість (2.32) руху частинки, м/с;

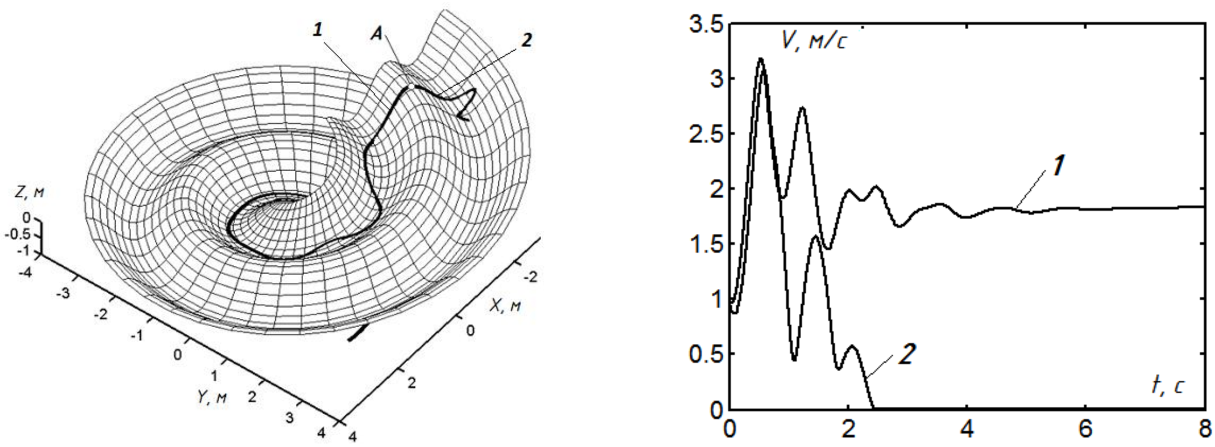
A – вираз, що повторюється:

$$A = \sqrt{a^2 c^2 \rho^2 \cos^2 a\rho + \rho^2 + b^2}. \qquad (2.37)$$

Отримані рівняння (2.37), (2.36) та (2.32) дають змогу досліджувати рух частинки по гвинтовій поверхні з синусоїдальним перерізом при різних параметрах цієї поверхні, а також при різних коефіцієнтах тертя.

Нехай осьовим перерізом гвинтової поверхні буде синусоїда, представлена на рис. 2.9,а (гвинтовий параметр для цієї поверхні становить b=*0,5 м*). Частинка подавалася на поверхню в точку *A* (див. рис. 2.9,а) – на вершину гребня, що відповідає початковому значенню відстані ρ_A=2,6 *м*. Початкова швидкість задавалася в радіальному напрямку від осі і до осі гвинтової поверхні, тобто ρ'_A=±*1 м/с*.

При ρ'_A=*–1 м/с* частинка починає рухатися з точки *A* до осі поверхні і опускається в жолоб, по якому продовжує рух вниз – крива на графіку позначена цифрою *1* (див. рис. 2.10,а). У такому випадку швидкість стабілізується і наближається до постійного значення ≈ *2 м/с* (див. рис. 2.10,б). Після стабілізації траєкторією руху є гвинтова лінія на поверхні.



а) б)

Рис. 2.10. Рух частинки по гвинтовій поверхні (час руху t=*8 с*, коефіцієнт тертя f=*0,3*): 1 – початкова швидкість до осі поверхні ρ'_A=*–1 м/с*, 2 – від осі поверхні ρ'_A=*1 м/с*:

а) траєкторії руху частинки, що починаються в точці *A*;

б) графіки зміни швидкості V=$V(t)$ руху

При *ρ'$_A$=1 м/с* частинка починає рухатися з точки *A* від осі поверхні і, подолавши певний шлях, зупиняється. З графіку зміни швидкості *V=V(t)* (крива на графіку позначена цифрою *2*) (див. рис. 2.10,б) випливає, що частинка зупиняється після $t \approx 2{,}5$ *с* руху. Пояснюється це тим, що по мірі віддалення від осі поверхні кут нахилу гвинтових ліній (ймовірних траєкторій руху) зменшується.

Коли кут нахилу гвинтової лінії дна жолоба стає менше кута тертя, рух стає неможливим. Критичний кут може бути визначений за допомогою наступної формули: $\varphi = arctg(\frac{b}{\rho})$. Для описаного випадку *ρ=3,7 м* отримаємо $\varphi = arctg(\frac{0{,}5}{3{,}7}) = 7{,}7°$. Це значно менше кута тертя $\varphi_f = arctgf = arctg0{,}3 = 16{,}7°$. У першому випадку кут *φ* перевищує кут тертя, а саме, для *ρ=1,5 м* (див. рис. 2.9,а) він становить *18,4°*.

На рис. 2.11 побудована траєкторія руху частинки з коефіцієнтом тертя *f=0,1*, яка починає рух з дна жолоба при *ρ=1,5 м* і нульовій початковій швидкості V_0*=0 м/с*.

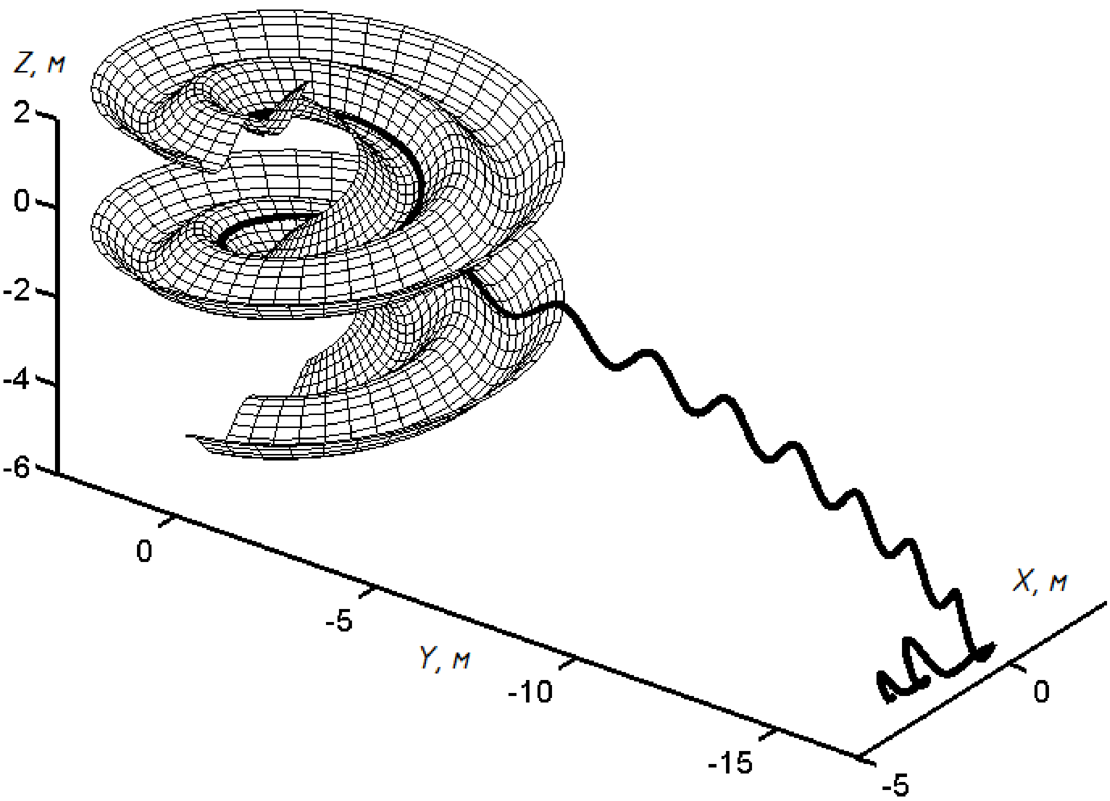
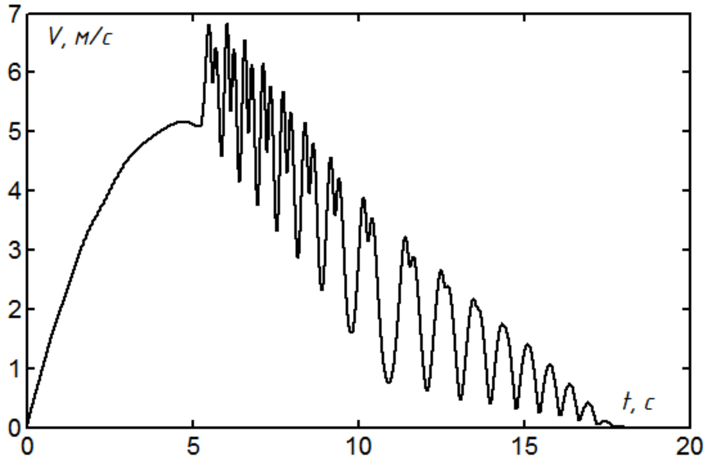
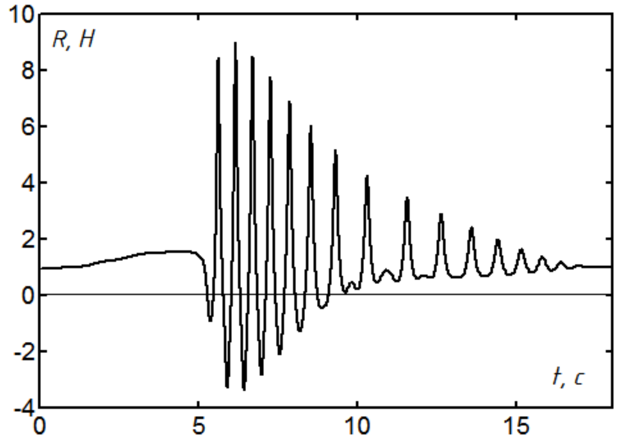


Рис. 2.11. Траєкторія руху частинки при коефіцієнті тертя *f=0,1*

Аналіз траєкторії (див. рис. 2.11) показує, що частинка розганяється по жолобу до такої міри, що подальший її рух триває від осі поверхні з подоланням деякого числа жолобів і закінчується зупинкою в останньому жолобі. Це підтверджує графік зміни швидкості руху частинки (див. рис. 2.12,а).



а)



б)

Рис. 2.12. Графіки зміни характеристик руху частинки (час руху *t=18 с*, коефіцієнт тертя *f=0,1*, маса частинки *m = 0,1 кг*):

а) графік зміни швидкості *V=V(t)* руху;

б) графіки зміни сили реакції *R=R(t)*

При русі частинки по траєкторії, близькій до гвинтової лінії протягом *5 с* (див. рис. 2.12, б), сила реакції є позитивною величиною. Коли частинка здійснює хвилеподібний рух при подоланні жолобів (на рис. 2.11 для цієї ділянки траєкторії поверхню умовно не показано), реакція поверхні *R* змінюється, приймаючи і негативні значення. Ці залежності отримані, виходячи з математичної умови, що частинка завжди знаходиться на поверхні. Це було б справедливо, якби частинка перебувала між двома еквідистантним поверхнями, реакції яких чергувалися в залежності від знаку. Оскільки поверхня одна, то це означає відрив частинки від неї в момент зміни знаку реакції з позитивного на негативний. У зв’язку з цим хвилеподібна частина траєкторії руху частинки може відрізнятися від реальної.

Варто звернути увагу, що зменшення періоду синусоїди веде до зменшення різниці відстані ρ між нижніми гвинтовими лініями сусідніх жолобів поверхні. Внаслідок цього зменшується різниця між кутами їх нахилу. Можна припустити, що це змінить характер руху частинок з різним коефіцієнтом тертя і дозволить їм рухатися по різних жолобах без зупинки. Унаочнимо це припущення.

На рис. 2.13 побудована синусоїда при *a=15* і *c=0,2* – період зменшено у *5* разів, а амплітуду – у *2* рази. Гвинтовий параметр поверхні *b* прийнятий рівним *b=35 м*.

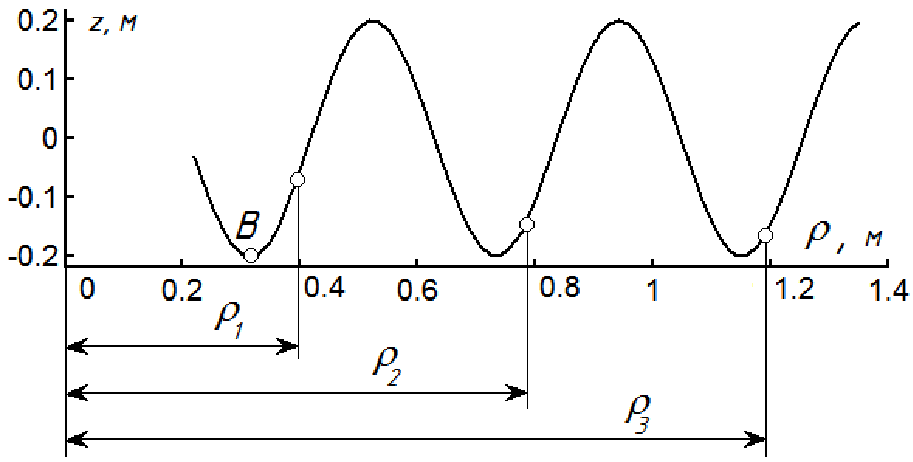
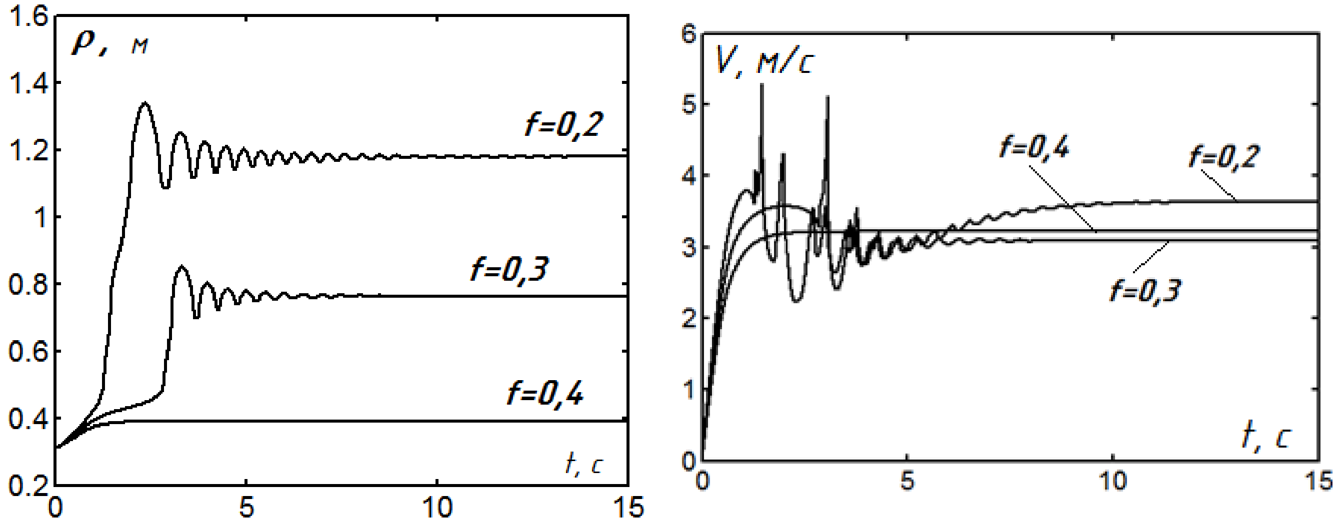


Рис. 2.13. Синусоїда – осьовий переріз гвинтової поверхні при заданих сталих *a=15, c=0,2*, гвинтовому параметрі поверхні *b=35 м*: ρ_1 – *f=0,4*, ρ_2 – *f=0,3*, ρ_3 – *f=0,2*

На гвинтову поверхню частинки подавалися з нульовою початковою швидкістю і різними коефіцієнтами тертя в одну і ту ж саму нижню точку *B* найближчого до осі поверхні жолоба (див. рис. 2.13). Цій точці відповідає відстань ρ*=0,31 м*. По мірі розгону частинка віддаляється від осі, тобто відстань ρ протягом деякого часу збільшується, а після настає стабілізація руху (приблизно через *5 с*, що видно на рис. 2.14,а).

На рис. 2.14,а побудовані графіки зміни відстані ρ для частинок з різним коефіцієнтом тертя. З нього видно, що частинки з різним коефіцієнтом тертя *f* після стабілізації рухаються на різній відстані від осі поверхні. Відстань ρ при *f=0,4* складає *0,4 м*. Цю відстань позначено на рис. 2.13, як ρ_1. Вона вказує точку на синусоїді, через яку проходить гвинтова лінія – траєкторія руху частинки. Для частинок з коефіцієнтом тертя $f=0,3$ і $f=0,2$ ці відстані позначені через ρ_2 і ρ_3.



а) б)

Рис. 2.14. Графіки зміни характеристик руху частинки (час руху $t=15$ *с*, відстань подачі частинки на дно жолоба $\rho=0,31$ *м*):

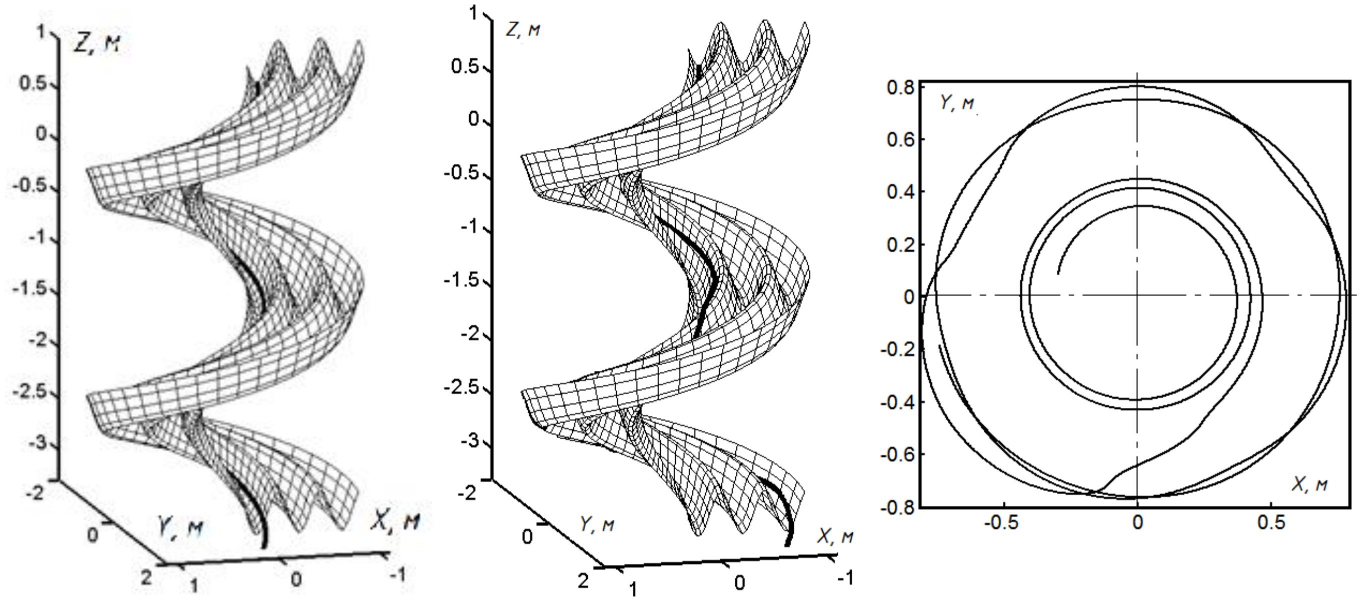
а) графік зміни відстані $\rho=\rho(t)$ від осі поверхні;

б) графік зміни швидкості $V=V(t)$ руху

Рис. 2.13 демонструє, що траєкторія руху частинки проходить вище дна жолоба. Дослідження показали, що вона не може бути вище точки *B* (див. рис. 2.9,а). Ця точка є точкою перегину синусоїди і після неї починається зменшення кута β (див. рис. 2.9,а). Траєкторія руху частинки в перехідному періоді може бути вище точки *B*, залишаючись в межах жолобу, а після стабілізації вона рухається по гвинтовій лінії, розташованій нижче точки *B*.

Побудований графік (див. рис. 2.14,б) зміни швидкості руху частинок з коефіцієнтами тертя $f=0,2$, $f=0,3$, $f=0,4$ показує, що після стабілізації руху швидкості стають сталими і мало відрізняються між собою: $V\approx 3,5$ *м/с*.

Нижні частини траєкторій руху по гвинтовій поверхні (див. рис. 2.15,а,б), побудованих для частинок з коефіцієнтами тертя $f=0,2$ та $f=0,4$, показують, що частинки рухаються в різних жолобах. На рис. 2.15,в для наочності показана горизонтальна проекція траєкторії частинки без поверхні (*f=0,3*). Із неї видно, що відстань ρ_2 з початком своєї стабілізації після попадання частинки в другий жолоб наближається до позначки *0,8 м*, що відповідає рис. 2.14,а.



а) б) в)

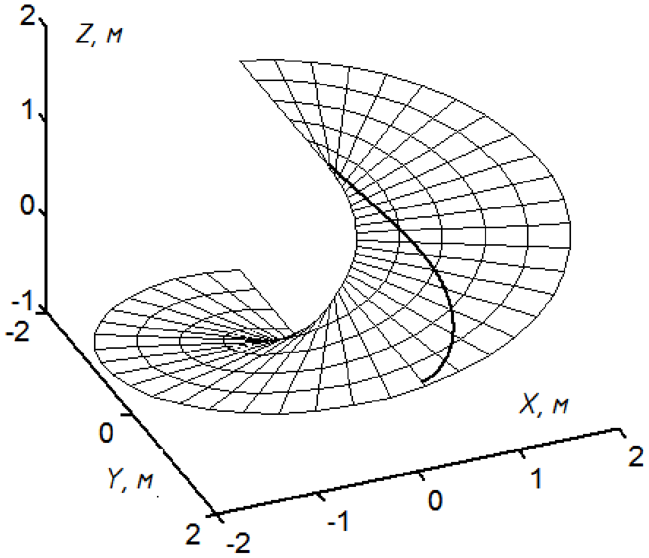
Рис. 2.15. Траєкторії руху частинки для різного коефіцієнту тертя:

а) траєкторія на поверхні при *f=0,4*;

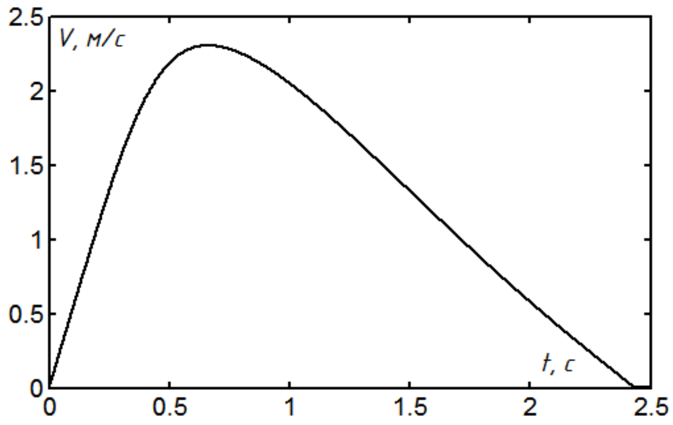
б) траєкторія на поверхні при *f=0,2*;

в) горизонтальна проекція траєкторії при *f=0,3*

Слід зауважити, що при *a=c=0* поверхня (2.27) перетворюється у гвинтовий коноїд (прямий гелікоїд). При цьому система рівнянь (2.36) значно спрощується. Результатом її розв'язання є траєкторія частинки, побудована на рис. 2.16,а. Частинка спочатку розганяється до швидкості понад *2 м/с*, віддаляючись від осі поверхні, потім її рух сповільнюється через зменшення кута нахилу поверхні. Приблизно через *2,5 с* після початку руху частинка зупиняється (див. рис. 2.16,б).



а)



б)

Рис. 2.16. Рух частинки по поверхні гвинтового коноїда (час руху *t=2,5 с*, *b=0,35 м*, *f=0,3*):

а) траєкторія руху;

б) графік зміни швидкості *V=V(t)* руху частинки

З вищевикладеного можна стверджувати, що при попаданні частинок з різним коефіцієнтом тертя в одну і ту ж точку гвинтової поверхні з синусоїдальним перерізом з часом вони здійснюють рух по різних траєкторіях. Це дозволяє підібрати такі конструктивні параметри поверхні, що після стабілізації руху групи частинок з близьким коефіцієнтом тертя будуть рухатися по окремих жолобах. По мірі зменшення коефіцієнта тертя, відстань до жолобу, по якому рухаються групи частинок, збільшується. Саме ця особливість дозволяє більш якісно розділяти матеріал по фрикційній ознаці у порівнянні з існуючими сепараторами з одним жолобом.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

Дослідження на основі комп'ютерних експериментів, викладені у другому розділі, дозволили отримати наступні результати:

1. Виведені узагальнені диференціальні рівняння (2.13) руху частинки у функції часу по стаціонарній гвинтовій поверхні з лінією осьового перерізу в параметричній формі задання дають змогу отримати необхідні характеристики руху частинки: траєкторію, швидкість (2.9) та нормальну реакцію.

2. Для поверхні косого гелікоїда виведено вирази для визначення віддалення траєкторії частинки від осі поверхні вздовж її твірної (2.20), швидкості частинки (2.22) та нормальної реакції поверхні (2.23) після стабілізації руху. Встановлено, що віддалення траєкторії руху частинки від осі поверхні (див. рис. 2.3,а) та її швидкість (див. рис. 2.3,б) залежать від конструктивних параметрів поверхні та коефіцієнта тертя f.

3. Встановлено, що при русі частинки по гвинтовому жолобу з осьовим перерізом у вигляді півкола та кутом підйому дна жолоба $\varphi = arctg\,\frac{b}{d}$: 1) будуть виникати затори матеріалу при $\frac{b}{d} < f$; 2) рух частинок з часом стабілізується, траєкторії їх руху розділяються і наближаються до гвинтових ліній на різній відстані від осі поверхні, а швидкість наближається до сталого значення при $\frac{b}{d} > f$; 3) незалежно від величини і напрямку початкової швидкості траєкторія руху частинки з часом асимптотично наближається до гвинтової лінії – дна жолобу, а швидкість руху асимптотично наближається до нуля при $\frac{b}{d} = f$.

Для кожного випадку може бути знайдено точний аналітичний розв'язок і визначено кінематичні параметри руху частинки після його стабілізації. При рівності нулю гвинтового параметру поверхні отримана система (2.25) диференціальних рівнянь описує окремий випадок руху частинки по внутрішній поверхні тора.

4. Встановлено, що рух матеріалу по поверхні, утвореній гвинтовим рухом синусоїди, є неможливим при заданні напрямку початкової швидкості частинки від

осі поверхні в радіальному напрямі, оскільки кут нахилу гвинтових ліній стає меншим за кут тертя. Виведено формулу для визначення критичної величини такого кута. Встановлено, що при зменшенні коефіцієнта тертя нормальна реакція поверхні стає знакоперемінною (див. рис. 2.12,б), що означає відрив частинки від поверхні.

5. При зменшенні періоду синусоїди по мірі зменшення коефіцієнта тертя відстань від осі поверхні до жолобу, по якому рухаються групи частинок, збільшується (див. рис. 2.14,а), що дозволяє підібрати конструктивні параметри поверхні таким чином, що після стабілізації руху групи частинок з близьким коефіцієнтом тертя будуть рухатися по окремих жолобах. Таке конструктивне рішення забезпечує більш якісне розділення матеріалу по фрикційній ознаці у порівнянні з існуючими сепараторами з одним жолобом.

При нульовій амплітуді синусоїдальної кривої осьового перерізу поверхня перетворюється на гвинтовий коноїд (див. рис. 2.16), для якого стабілізація руху неможлива.

Матеріали даного розділу опубліковано у працях [126, 130, 245, 246].

РОЗДІЛ 3
АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС РУХУ ЧАСТИНКИ ПО РУХОМИХ ПОВЕРХНЯХ У ФУНКЦІЇ ЧАСУ

Параметричні рівняння у функції часу можуть застосовуватися для виявлення закономірностей відносного руху, тобто ковзання частинок по поверхнях, які в свою чергу здійснюють поступальний, обертальний або комбінований рухи.

Рухома шорстка площина є найпростішим робочим органом різних механізмів та систем, таких як преси, похилі та гвинтові підйомники, конвеєри, сепаратори тощо [1, 6, 9, 16, 24, 25, 41, 43, 58, 62, 67, 89, 109, 147, 149, 152, 216]. Застосування площини, що здійснює коливальний рух, у ролі робочих поверхонь дозволяє переміщувати вантажі або матеріали.

3.1. Аналітичний опис руху частинки по поверхнях, які здійснюють коливальні рухи

Форма траєкторій ковзання частинок залежить від характеру руху площини [279–281]. Найбільш дослідженим є рух частинок по горизонтальній площині, яка здійснює коливальний прямолінійний або поступальний рухи [4, 10, 143, 227, 228, 234]. Для похилої площини дослідження в основному ведуться при її прямолінійних зворотно-поступальних коливаннях в різних напрямах по відношенню до лінії найбільшого нахилу [122, 260–262, 300, 307]. При переході до коливального руху поверхонь було вибрано найпростіші циліндричні поверхні з поперечним перерізом у вигляді дуги кола та синусоїди.

3.1.1. Рух частинки по хвилястій поверхні, усі точки якої описують кола в горизонтальних площинах

Хвиляста поверхня із поперечним перерізом у вигляді синусоїди в ролі робочої поверхні відповідає перспективним конструкціям спеціалізованого обладнання для делікатної обробки сировини та суттєво змінюватиме траєкторії ковзання частинок в порівнянні з горизонтальною площиною. В такому випадку потрібно співставляти частоту обертання поверхні із амплітудою синусоїди – кривої її поперечного перерізу.

Нехай такою поверхнею є циліндрична із горизонтальним розташуванням прямолінійних твірних і поперечним перерізом у вигляді синусоїди (див. рис. 2.8,а). Її параметричні рівняння запишуться:

$$X = u;$$
$$Y = v; \quad (3.1)$$
$$Z = c\,\sin av,$$

де c – амплітуда;

a – частота (сталі величини),

u, v – незалежні змінні поверхні: u – довжина прямолінійної твірної, v – відстань вздовж осі OY.

Циліндрична хвиляста поверхня здійснює поступальні коливання таким чином, що всі її точки описують кола (див. рис. 3.1, на якому показані траєкторії переміщення чотирьох точок поверхні). Абсолютний рух частинки будемо розглядати по відношенню до нерухомої системи координат $OXYZ$.

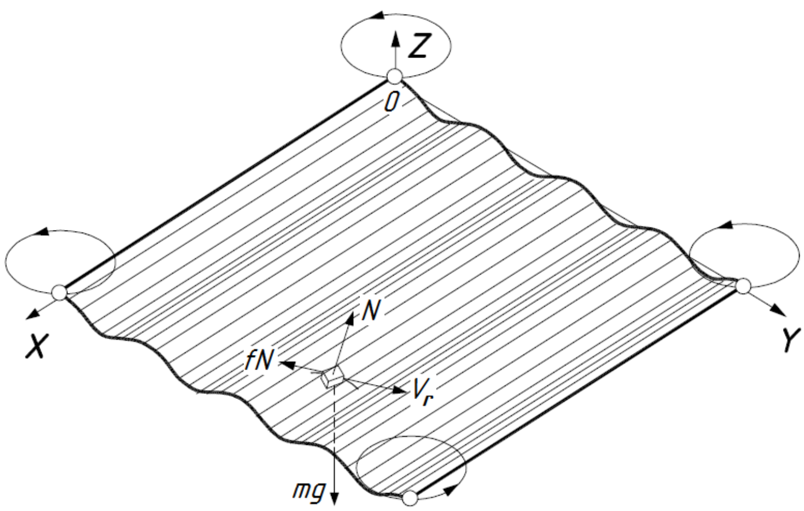


Рис. 3.1. Схема колових коливань хвилястої поверхні та прикладені до частинки сили

Якщо поверхню прив'язати до рухомої системи координат, то при її коливанні осі рухомої і нерухомої систем весь час будуть паралельними. Тоді абсолютну траєкторію частинки можна записати як суму переносного руху поверхні, точки якої описують кола, і відносного руху точки по хвилястій поверхні:

$$\begin{aligned} x &= x_e + x_r; \\ y &= y_e + y_r; \\ z &= z_e + z_r, \end{aligned} \tag{3.2}$$

де $x_e = x_e(t)$; $y_e = y_e(t)$; $z_e = z_e(t)$ – траєкторія переносного руху поверхні у функції часу t; $x_r = x_r(t)$; $y_r = y_r(t)$; $z_r = z_r(t)$ – траєкторія відносного руху частинки по поверхні у функції часу t.

Позначимо радіуси кіл, по яких рухаються точки поверхні, через r. Переносний рух точок хвилястої поверхні описується рівняннями:

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{e}} &= r \cos\omega t; \\ y_{\mathrm{e}} &= r \sin\omega t; \\ z_{\mathrm{e}} &= 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

де ω – кутова швидкість обертання точок поверхні по колах, c^{-1}.

Рівняння траєкторії руху частинки по поверхні отримаємо, зв'язавши між собою незалежні змінні v і u поверхні (3.1) через час t. Координати частинки на хвилястій поверхні є функціями часу: $v=v(t)$ і $u=u(t)$. Відносний рух частинки описується рівняннями:

$$\begin{aligned} x_r &= u; \\ y_r &= v; \\ z_r &= c \sin av. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Сумуючи переносний (3.3) і відносний (3.4) рухи за формулою (3.2), отримаємо рівняння абсолютної траєкторії частинки:

$$x = u + r\cos\omega t;$$
$$y = v + r\sin\omega t; \qquad (3.5)$$
$$z = c\sin av.$$

Залежності $v=v(t)$ і $u=u(t)$, які описують траєкторію відносного руху (ковзання частинки по хвилястій поверхні), є шуканими функціями. Диференціюванням рівнянь (3.5) по часу t знайдемо проекції абсолютної швидкості частинки:

$$x' = u' - r\omega\sin\omega t;$$
$$y' = v' + r\omega\cos\omega t; \qquad (3.6)$$
$$z' = acv'\cos av.$$

Диференціюванням виразів (3.6) отримуємо проекції абсолютного прискорення:

$$x'' = u'' - r\omega^2\cos\omega t;$$
$$y'' = v'' - r\omega^2\sin\omega t; \qquad (3.7)$$
$$z'' = ac\left(v''\cos av - av'^2\sin av\right).$$

Складемо рівняння руху у вигляді (2.3). Усі прикладені до частинки сили спроєктуємо на осі системи координат *OXYZ*.

Сила ваги спрямована вниз. Її проекції запишуться:

$$[0; \quad 0; \quad -mg]. \qquad (3.8)$$

Реакція R поверхні спрямована по нормалі $\overline{N}$ до неї і визначається із векторного добутку векторів, дотичних до координатних ліній поверхні. Проекціями цих векторів є часткові похідні рівнянь (3.1):

$$\begin{aligned} X_u &= 1; \quad Y_u = 0; \quad Z_u = 0; \\ X_v &= 0; \quad Y_v = 1; \quad Z_v = ac\,\cos av. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Після векторного множення векторів (3.9) і приведення отриманого вектора нормалі до одиничного напрямні косинуси запишуться:

$$\begin{aligned} N_x &= 0; \\ N_y &= -\frac{ac\,\cos av}{\sqrt{1 + a^2 c^2\,cos^2\,a\,v}}; \\ N_z &= \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 c^2 \cos^2 av}}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Сила тертя спрямована по дотичній до траєкторії відносного руху частинки в протилежну сторону вектора швидкості ковзання частинки. Напрям цього вектора визначається першими похідними рівнянь (3.4):

$$\begin{aligned} x_r' &= u'; \\ y_r' &= v'; \\ z_r' &= acv'\cos av. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Величина швидкості ковзання частинки по хвилястій поверхні у відносному русі визначається наступним чином:

$$V_r = \sqrt{{x'_r}^2 + {y'_r}^2 + {z'_r}^2} = \sqrt{u'^2 + v'^2(1 + a^2 c^2 \cos^2 av)}. \tag{3.12}$$

Одиничний вектор відносної швидкості руху частинки в проекціях на осі системи *OXYZ* одержимо діленням проекцій (3.11) на величину вектора (3.12):

$$T_x = \frac{u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2(1 + a^2c^2\cos^2 av)}};$$
$$T_y = \frac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2(1 + a^2c^2\cos^2 av)}}; \qquad (3.13)$$
$$T_z = \frac{acv'\cos av}{\sqrt{u'^2 + v'^2(1 + a^2c^2\cos^2 av)}}.$$

За виразами (2.12) розпишемо векторне рівняння (2.3) в проекціях на осі системи координат *OXYZ*, взявши до уваги, що сила тертя *fR* спрямована вздовж одиничного вектора (3.13) в протилежну до нього сторону:

$$m(u'' - r\omega^2\cos\omega t) = -fR\frac{u'}{V_r};$$
$$m(v'' - r\omega^2\sin\omega t) = -\frac{Rac\cos v}{\sqrt{1 + a^2c^2\cos^2 av}} - fR\frac{v'}{V_r}; \qquad (3.14)$$
$$mac(v''\cos av - av'^2\sin av) =$$
$$= -mg + \frac{R}{\sqrt{1 + a^2c^2\cos^2 av}} - fR\frac{acv'\cos av}{V_r}.$$

До системи (3.14) входить три невідомі функції: *R=R(t), u=u(t)* і *v=v(t)*. Розв’язуючи її відносно R, u" і v", отримаємо закон руху частинки по поверхні (3.1):

$$v'' = \frac{1}{A^2}[r\omega^2\sin\omega t + ac(a^2cv'^2\sin av - g)\cos av] - \frac{fv'}{AV}B;$$
$$u'' = r\omega^2\cos\omega t - \frac{fv'}{AV}B; \qquad (3.15)$$
$$R = \frac{m}{A}B,$$

де $A = \sqrt{1 + a^2 c^2 \cos^2 av}$;

$B = [g + ac(r\omega^2 \cos av \sin\omega t - av'^2 \sin av)]$.

Система (3.15) не може бути проінтегрована в аналітичному вигляді. Її потрібно розв'язувати чисельними методами. Знайдені залежності $v=v(t)$ і $u=u(t)$ потрібно підставити у рівняння (3.4) для того, щоб одержати відносну траєкторію руху частинки по хвилястій поверхні – траєкторію ковзання.

Ковзання частинки по площині буде частковим випадком ковзання по хвилястій поверхні, коли амплітуда синусоїди дорівнює нулю. У такому випадку система (3.15) значно спрощується:

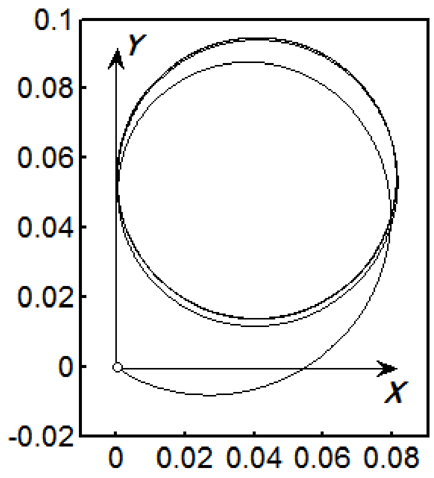
$$\begin{aligned} v'' &= r\omega^2 \sin\omega t - fg\frac{v'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \\ u'' &= r\omega^2 \cos\omega t - fg\frac{u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}; \\ R &= mg. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Траєкторію ковзання частинки по площині при наступних її параметрах: *r=0,05 м, ω=10 с$^{-1}$, f=0,3* зображено на рис. 3.2,а. Після перехідного процесу траєкторією ковзання частинки є коло, радіус якого менший від кола, яке описують точки площини в своєму русі.

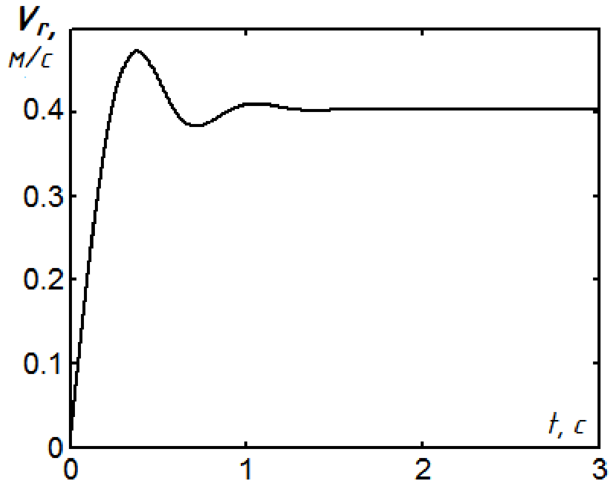
Графік зміни швидкості ковзання V_r частинки протягом *3 с* (див. рис. 3.2,б) показує, що після перехідного процесу, швидкість частинки стає сталою ($V_r \approx 0{,}4$ *м/с*). Скористаємося цим фактом, щоб знайти аналітичний опис ковзання частинки після стабілізації її руху.

При $\sqrt{u'^2 + v'^2} = V_r = \text{const}$ система (3.16) розпадається на два незалежних диференціальних рівняння:

$$v'' = r\omega^2 \sin\omega t - fg\frac{v'}{V_r}; \qquad u'' = r\omega^2 \cos\omega t - fg\frac{u'}{V_r}. \tag{3.17}$$



а)



б)

Рис. 3.2. Ковзання частинки по площині при наступних її параметрах: *r=0,05 м*, *ω=10 с*$^{-1}$, *f=0,3*:

а) траєкторія ковзання частинки;

б) графік зміни відносної швидкості $V_r=V_r(t)$ руху частинки

Їх часткові розв'язки, коли сталі інтегрування дорівнюють нулю, запишуться:

$$v = -\frac{rV_r\omega}{f^2g^2 + V_r^2\omega^2}(fg\,\cos\omega t + V_r\omega\,\sin\omega t);$$
$$u = \frac{rV_r\omega}{f^2g^2 + V_r^2\omega^2}(fg\,\sin\omega t - V_r\omega\,\cos\omega t). \tag{3.18}$$

Вираз для сталої швидкості V_r через задані параметри коливального руху знайдемо із рівнянь (3.18):

$$V_r = \sqrt{u'^2 + v'^2} = \frac{rV_r\omega^2}{\sqrt{f^2g^2 + V_r^2\omega^2}}. \tag{3.19}$$

Розв'язавши (3.19) відносно V_r, знаходимо:

$$V_r = \frac{\sqrt{r^2\omega^4 - f^2g^2}}{\omega}. \quad (3.20)$$

Тоді параметричні рівняння траєкторії ковзання частинки по площині у відносному русі після його стабілізації отримуємо підстановкою (3.20) у (3.18):

$$\begin{aligned} v &= -r\sin\omega t + \frac{fg}{r\omega^4}\left(fg\sin\omega t - \sqrt{r^2\omega^4 - f^2g^2}\cos\omega t\right); \\ u &= -r\cos\omega t + \frac{fg}{r\omega^4}\left(fg\cos\omega t + \sqrt{r^2\omega^4 - f^2g^2}\sin\omega t\right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Радіус r_r кола ковзання частинки по площині після стабілізації руху, знаходимо із (3.21):

$$r_r = \sqrt{u^2 + v^2} = r\sqrt{1 - \left(\frac{fg}{r\omega^2}\right)^2}. \quad (3.22)$$

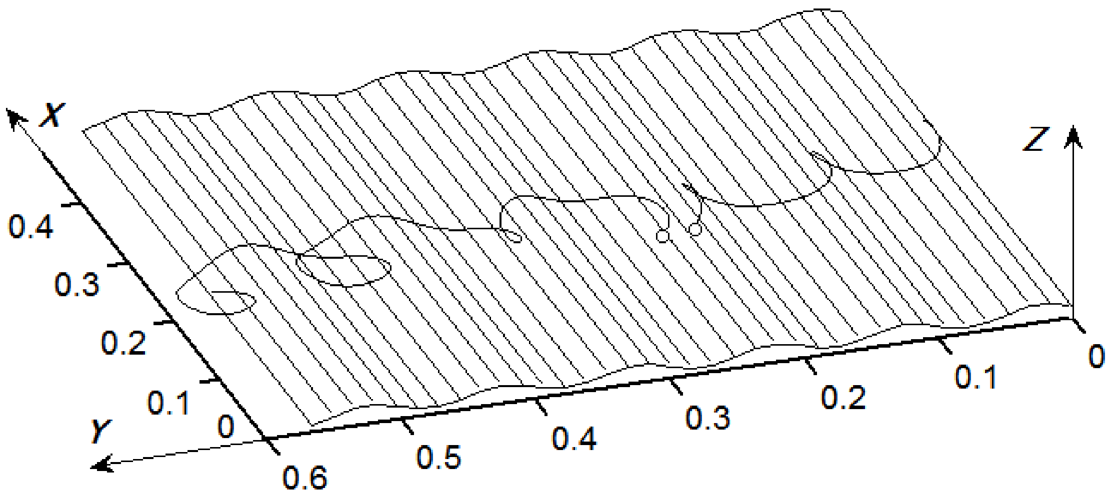
Радіус r_r наближається до радіуса r при зменшенні коефіцієнта f тертя або ж при зростанні кутової швидкості ω коливань площини.

Якщо площина абсолютно гладенька ($f=0$), то рівняння відносного руху (3.21) мають протилежний знак рівнянь переносного руху (3.3). Відповідно до рівнянь (3.5) частинка в абсолютному русі залишається нерухомою.

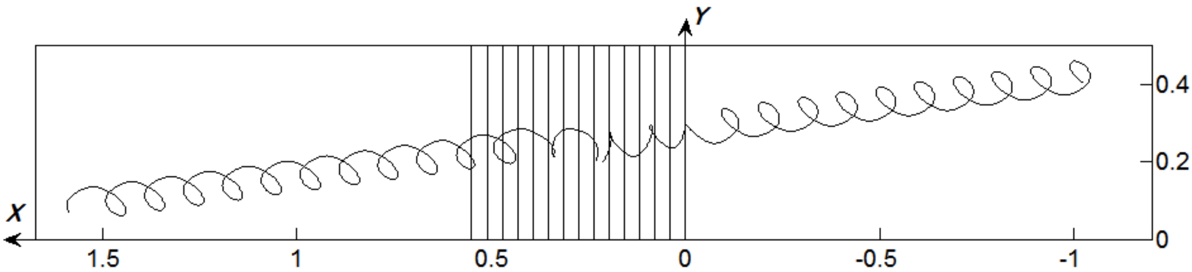
Побудуємо відносні траєкторії руху частинки по поверхні з синусоїдальним перерізом. Форма поверхні повинна бути обмежена через параметри її поперечного перерізу. Приймемо синусоїду зі сталими значеннями: $c=0,005$ – амплітуда і $a=62,8$ – частота (період $T=a/2\pi=0,1$). Співвідношення амплітуди до періоду становить *1:20*. При менших співвідношеннях відбувається відрив частинки від поверхні. Вказане співвідношення не є усталеним, воно залежить від радіуса r кіл, по яких відбувається коливання поверхні, кутової швидкості ω, коефіцієнта тертя f.

Розглянемо три випадки: коли діаметр кіл переносного руху поверхні дорівнює періоду, є більшим та меншим за нього.

<u>*Випадок перший.*</u> Діаметр кіл переносного руху поверхні дорівнює періоду ($2r=T$). Цей випадок є характерним, оскільки траєкторія ковзання частинки по поверхні не є замкненою лінією (див. рис. 3.3).



а)



б)

Рис. 3.3. Траєкторії відносного руху частинки по хвилястій поверхні при $r=0{,}05$ *м*, $\omega=10$ c^{-1}, $f=0{,}3$, $c=0{,}005$, $a=62{,}8$:

а) на обмеженій ділянці поверхні в аксонометрії;

б) на горизонтальній проекції протягом *8 с*

Траєкторією ковзання є періодична просторова крива, при цьому криволінійне ковзання частинки спрямовується в напрямі, близькому до напряму осі OY, і частинка при своєму русі долає впадини і гребні поверхні. Напрям такого руху може відбуватися як у бік осі *OY*, так і в протилежну сторону. Це залежить від точки попадання частинки на поверхню.

На рис. 3.3,а побудовано траєкторії відносного руху частинки на обмеженій ділянці поверхні, де відбувається перехідний процес, із зазначенням точки попадання на поверхню. На рис. 3.3,б показана горизонтальна проекція траєкторій відносного руху частинки протягом *8 с*.

При ковзанні частинки по хвилястій поверхні її реакція R змінюється на відміну від площини, де $R=mg$. На рис. 3.4 побудовано графік зміни реакції R поверхні для частинки масою $m=0{,}01$ *кг*. Він побудований для однієї із траєкторій, зображених на рис. 3.3,б, і характерний і для іншої траєкторії.

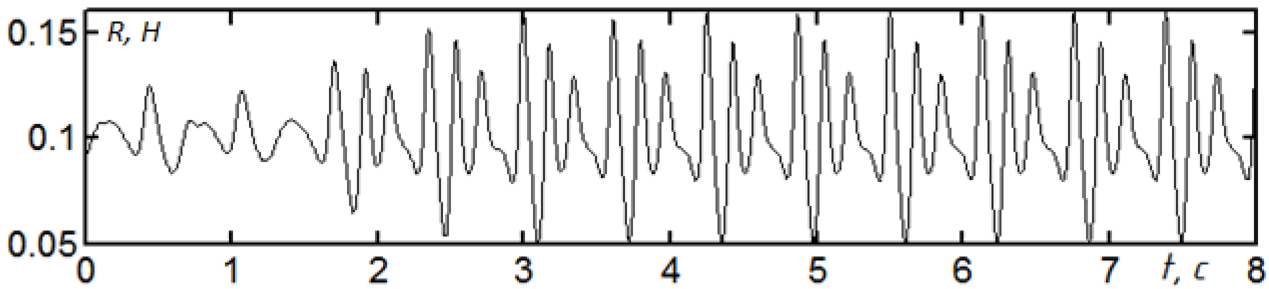


Рис. 3.4. Графік зміни реакції поверхні R на частинку масою *0,01 кг*, яка ковзає по хвилястій поверхні

При зростанні кутової швидкості коливань ω поверхні характер поширення коливань не змінюється, однак в певні моменти часу реакція R поверхні набуває від'ємних значень – напрям її вектора змінюється на протилежний. У такому випадку траєкторія руху частинки була б реальною, якби вона рухалася між двох паралельних поверхонь. Оскільки маємо тільки одну поверхню, то в момент, коли реакція стає рівною нулю, відбувається відрив частинки від поверхні. З огляду на це, розглядатимемо тільки такі випадки руху, коли реакція має позитивний знак.

<u>*Випадок другий.*</u> Діаметр кіл переносного руху поверхні менший за період ($2r<T$). Після перехідного періоду траєкторія ковзання частинки стає замкненою. На рис. 3.5 побудовано траєкторії відносного руху частинки по хвилястій поверхні при

всіх попередніх параметрах, включно із точками попадання частинки на поверхню, зі зміною тільки одного параметра: $r=0,04$ *м*.

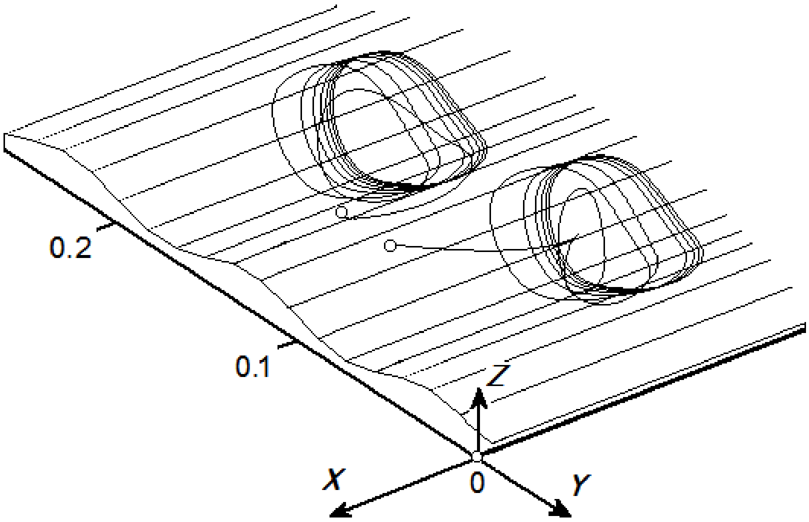


Рис. 3.5. Траєкторії відносного руху частинки по хвилястій поверхні при $r=0,04$ *м*, $\omega=10\ c^{-1}$, $f=0,3$, $c=0,005$, $a=62,8$

<u>*Випадок третій.*</u> Якщо діаметр кіл переносного руху поверхні більший за період ($2r>T$), перехідний період залежить від кутової швидкості ω коливань поверхні: може тривати досить довго (при $\omega=10\ c^{-1}$) або швидше переходити до замкненої траєкторії (при $\omega=15\ c^{-1}$) (див. рис. 3.6).

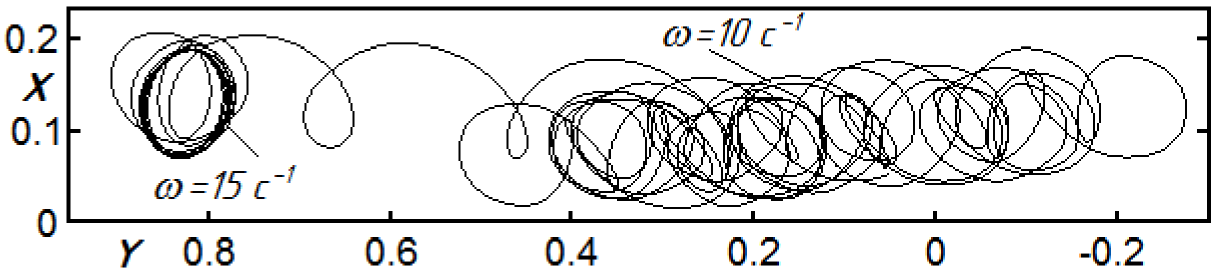
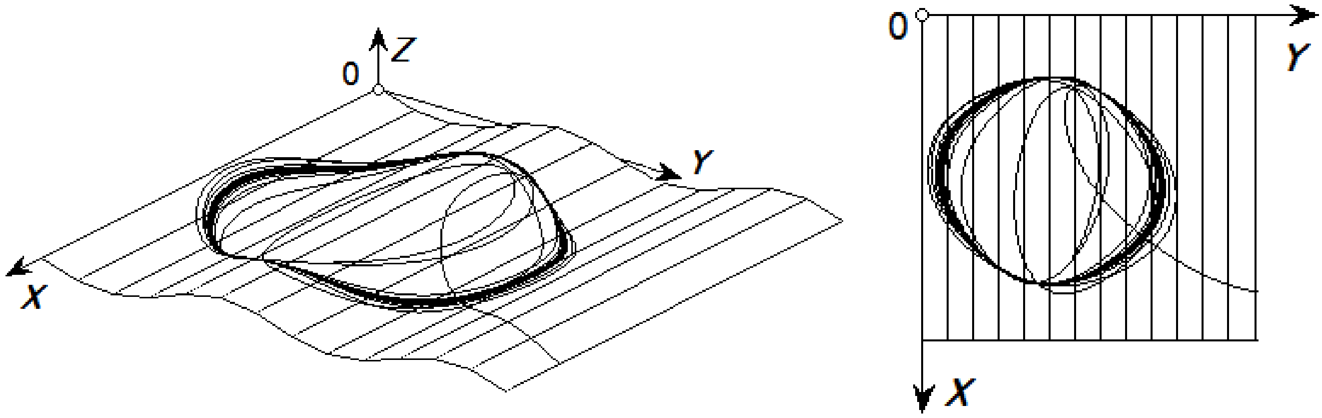


Рис. 3.6. Горизонтальна проекція траєкторій відносного руху частинки по хвилястій поверхні при $r=0,06$ *м*, $f=0,3$, $c=0,005$, $a=62,8$

При подальшому зростанні радіуса r частинка після перехідного періоду рухається по замкненій кривій. Ця крива збільшується у розмірах відповідно до радіуса *r* колових коливань поверхні. В підтвердження факту цього траєкторію ковзання частинки при збільшенні радіуса *r* кіл коливань до *0,07 м* побудовано на рис. 3.7.



а) б)

Рис. 3.7. Траєкторія відносного руху частинки по хвилястій поверхні при *r=0,07 м*, $\omega=10\ c^{-1}$, *f=0,3, c=0,005, a=62,8*:

а) аксонометричне зображення;

б) горизонтальна проекція

Розглянуті випадки досить повно відображають можливі траєкторії відносного руху частинки по хвилястій поверхні при її колових коливаннях.

3.1.2. Рух частинки по зовнішній поверхні циліндра, усі точки якого описують кола в горизонтальних площинах

Зовнішня поверхня циліндра, що здійснює колові поступальні коливання у горизонтальній площині, забезпечує унікальний режим передачі імпульсу та розподілу навантажень, що дозволяє підвищити ефективність і точність технологічних процесів, у яких вона застосовується. Така конструкція має місце у вібраційних транспортерах, мішалках, обробних установках тощо. Перейдемо до дослідження закономірностей руху частинок по зовнішній поверхні циліндра, який здійснює колові поступальні коливання в горизонтальних площинах, при різних кутах його нахилу.

Дослідження руху частинок по зовнішній циліндричній поверхні викладено у працях [123, 207, 270, 296, 302, 312]. При великому радіусі циліндра обмежена ділянка його поверхні, де відбувається відносний рух, буде близькою до площини. Відповідно і траєкторії відносного руху частинки в такому випадку мають бути подібними до площини.

Запишемо рівняння циліндра з горизонтальною віссю, якою є вісь OX:

$$\begin{aligned} X &= u; \\ Y &= r_0 \cos\alpha; \\ Z &= -r_0 \sin\alpha, \end{aligned} \tag{3.23}$$

де r_0 – радіус циліндра, м;
α, u – незалежні змінні поверхні: α – кут повороту точки циліндра навколо його осі; u – довжина прямолінійної твірної циліндра.

Розташуємо верхню половину циліндра (3.23) так, щоб його вісь була нахилена до горизонтальної площини під кутом β (див. рис. 3.8). Тоді його параметричні рівняння мають вигляд:

$$\begin{aligned} X &= u \cos\beta + r_0 \sin\beta \sin\alpha; \\ Y &= r_0 \cos\alpha; \\ Z &= u \sin\beta - r_0 \cos\beta \sin\alpha. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Нехай циліндр (3.24) здійснює поступальні коливання таким чином, що всі його точки описують кола в горизонтальних площинах (див. рис. 3.8, на якому показано траєкторії переміщення чотирьох точок циліндра) – рух поверхні є аналогічним до руху хвилястої лінійчатої поверхні у підрозділі 3.1.1.

У випадку циліндра вирази (3.3) дещо трансформуються і переносний рух точок циліндра описується рівняннями:

$$x_e = r\,\cos\omega t;$$
$$y_e = r\,\sin\omega t; \qquad (3.25)$$
$$z_e = h,$$

де h=const – висота точки циліндра по відношенню до початку координат;
r – радіуси кіл, по яких рухаються точки циліндра, м.

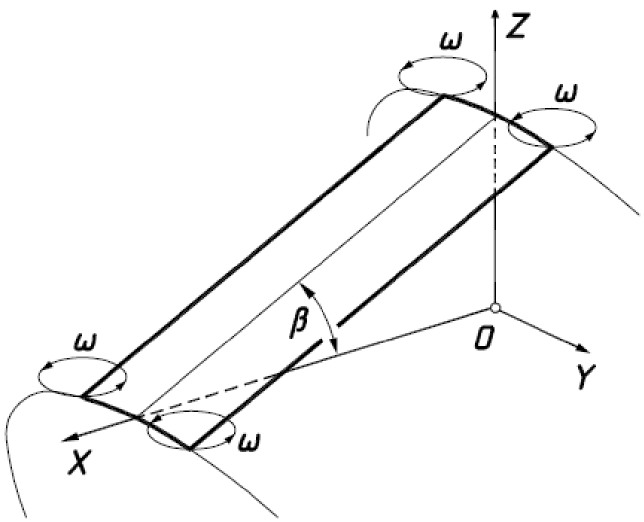


Рис. 3.8. Рух точок похилого циліндра по колах із кутовою швидкістю ω

Зв'яжемо між собою незалежні змінні α і u поверхні (3.24) через час t. Тоді координати частинки на поверхні циліндра будуть функціями часу: $\alpha=\alpha(t)$ і $u=u(t)$. В такому випадку відносний рух частинки описується рівняннями:

$$x_r = u\,\cos\beta + r_0\sin\beta\,\sin\alpha;$$
$$y_r = r_0\cos\alpha; \qquad (3.26)$$
$$z_r = u\,\sin\beta - r_0\cos\beta\,\sin\alpha.$$

Рівняння абсолютної траєкторії частинки знайдемо як суму переносного (3.25) і відносного (3.26) рухів за формулою (3.2):

$$x = u\cos\beta + r_0\sin\beta\,\sin\alpha + r\cos\omega t;$$
$$y = r_0\cos\alpha + r\sin\omega t; \qquad (3.27)$$
$$z = u\sin\beta - r_0\cos\beta\,\sin\alpha + h.$$

Залежності: $\alpha=\alpha(t)$ і $u=u(t)$, які описують траєкторію відносного руху (ковзання частинки по поверхні циліндра), є шуканими функціями. Проекції абсолютної швидкості частинки знаходимо диференціюванням рівнянь (3.27) по часу t:

$$x' = -r\omega\sin\omega t + u'\cos\beta + r_0\alpha'\sin\beta\,\cos\alpha;$$
$$y' = r\omega\cos\omega t - r_0\alpha'\sin\alpha; \qquad (3.28)$$
$$z' = u'\sin\beta - r_0\alpha'\cos\beta\,\cos\alpha.$$

Проекції абсолютного прискорення отримуємо диференціюванням виразів (3.28):

$$x'' = -r\omega^2\cos\omega t - r_0\alpha'^2\sin\beta\,\sin\alpha + u''\cos\beta + r_0\alpha''\sin\beta\,\cos\alpha;$$
$$y'' = -r\omega^2\sin\omega t - r_0\alpha'^2\cos\alpha - r_0\alpha''\sin\alpha; \qquad (3.29)$$
$$z'' = r_0\alpha'^2\cos\beta\,\sin\alpha + u''\sin\beta - r_0\alpha''\cos\beta\,\cos\alpha.$$

Складемо рівняння руху у векторному вигляді (2.3). Проекції сили ваги не будуть відрізнятися від випадку поверхні (3.8). Реакція поверхні циліндра R спрямована по нормалі $\overline{N}$ до нього і визначається із векторного добутку векторів, дотичних до координатних ліній циліндра. Проекціями цих векторів є часткові похідні рівнянь (3.24):

$$X_\alpha = r_0\sin\beta\,\cos\alpha; \quad Y_\alpha = -r_0\sin\alpha; \quad Z_\alpha = -r_0\cos\beta\,\cos\alpha;$$
$$X_u = \cos\beta; \quad Y_u = 0; \quad Z_u = \sin\beta. \qquad (3.30)$$

Векторне множення векторів (3.30) може дати два протилежно спрямованих вектори нормалі $\overline{N}$: або всередину циліндра, або назовні від нього. Це залежить від зміни місцями векторів (3.30) у визначнику векторного добутку. Перший добуток відповідає руху частинки по внутрішній поверхні циліндра, а другий – по зовнішній. З урахуванням цього знайдемо вектор нормалі $\overline{N}$ і приведемо його до одиничного:

$$N_x = \sin\beta \sin\alpha;$$
$$N_y = \cos\alpha; \quad (3.31)$$
$$N_z = -\cos\beta \sin\alpha.$$

Сила тертя спрямована по дотичній до траєкторії відносного руху частинки в протилежну сторону. Проекції вектора дотичної визначаються першими похідними рівнянь (3.26):

$$x_r' = u'\cos\beta + r_0\alpha'\sin\beta \cos\alpha;$$
$$y_r' = -r_0\alpha'\sin\alpha; \quad (3.32)$$
$$z_r' = u'\sin\beta - r_0\alpha'\cos\beta \cos\alpha.$$

Величина швидкості ковзання частинки по поверхні циліндра у відносному русі є геометричною сумою складових (3.32):

$$V_r = \sqrt{x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^2} = \sqrt{u'^2 + r_0^2\alpha'^2}. \quad (3.33)$$

Одиничний вектор дотичної в проекціях на осі системи *OXYZ* отримуємо діленням проекцій (3.32) на величину вектора (3.33):

$$T_x = \frac{u'\cos\beta + r_0\alpha'\sin\beta\,\cos\alpha}{\sqrt{u'^2 + r_0^2\alpha'^2}};$$

$$T_y = -\frac{r_0\alpha'\sin\alpha}{\sqrt{u'^2 + r_0^2\alpha'^2}}; \tag{3.34}$$

$$T_z = \frac{u'\sin\beta - r_0\alpha'\cos\beta\,\cos\alpha}{\sqrt{u'^2 + r_0^2\alpha'^2}}.$$

Розпишемо векторне рівняння руху (2.3) в проекціях на осі системи координат, взявши до уваги, що сила тертя fR спрямована вздовж одиничного вектора (3.34) в протилежну до нього сторону:

$$mx'' = R\sin\beta\,\sin\alpha - fR\frac{u'\cos\beta + r_0\alpha'\sin\beta\,\cos\alpha}{\sqrt{u'^2 + r_0^2\alpha'^2}};$$

$$my'' = R\cos\alpha - fR\frac{r_0\alpha'\sin\alpha}{\sqrt{u'^2 + r_0^2\alpha'^2}}; \tag{3.35}$$

$$mz'' = -mg - R\cos\beta\,\sin\alpha - fR\frac{u'\sin\beta - r_0\alpha'\cos\beta\,\cos\alpha}{\sqrt{u'^2 + r_0^2\alpha'^2}}.$$

Підставимо в рівняння (3.35) другі похідні (проекції абсолютного прискорення) із (3.29) і отримаємо систему трьох рівнянь:

$$m(-r\omega^2\cos\omega t - r_0\alpha'^2\sin\beta\,\sin\alpha + u''\cos\beta + r_0\alpha''\sin\beta\,\cos\alpha) =$$
$$= R\sin\beta\,\sin\alpha - fR\frac{u'\cos\beta + r_0\alpha'\sin\beta\,\cos\alpha}{\sqrt{u'^2 + r_0^2\alpha'^2}};$$

$$m(-r\omega^2\sin\omega t - r_0\alpha'^2\cos\alpha - r_0\alpha''\sin\alpha) = R\cos\alpha - fR\frac{r_0\alpha'\sin\alpha}{\sqrt{u'^2 + r_0^2\alpha'^2}}; \tag{3.36}$$

$$m(r_0\alpha'^2\cos\beta\,\sin\alpha + u''\sin\beta - r_0\alpha''\cos\beta\,\cos\alpha) =$$
$$= -mg - R\cos\beta\,\sin\alpha - fR\frac{u'\sin\beta - r_0\alpha'\cos\beta\,\cos\alpha}{\sqrt{u'^2 + r_0^2\alpha'^2}}.$$

До системи (3.36) входить три невідомі функції: *R=R(t), u=u(t)* і *α=α(t)*. Розв'язуючи її відносно R, u'' і α'', отримаємо закон руху частинки по поверхні циліндра:

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \frac{1}{r_0}[-r\omega^2 \sin\alpha \sin\omega t + (r\omega^2 \sin\beta \cos\omega t + g\cos\beta)\cos\alpha] + \\ &+ \frac{Af\alpha'}{\sqrt{u'^2 + r_0^2\alpha'^2}}; \\ u'' &= r\omega^2 \cos\beta \cos\omega t - g\sin\beta + \frac{Afu'}{\sqrt{u'^2 + r_0^2\alpha'^2}}; \\ R &= -mA, \end{aligned} \tag{3.37}$$

де $A = r_0\alpha'^2 + g\cos\beta \sin\alpha + r\omega^2(\cos\alpha \sin\omega t + \sin\beta \sin\alpha \cos\omega t)$.

Аналогічно попередньому випадку, система (3.37) не може бути проінтегрована в аналітичному вигляді. Відносну траєкторію руху частинки по поверхні циліндра (траєкторію ковзання) отримуємо підстановкою знайдених чисельними методами залежностей *α=α(t)* і *u=u(t)* у рівняння (3.2).

Розглянемо окремі випадки розташування циліндра та наявності чи відсутності його руху.

Випадок перший. *β=0* – прямолінійні твірні циліндра паралельні горизонтальній площині. Циліндр здійснює поступальні коливання. Інтегрування системи (3.37) здійснювалося при *r=0,05 м,* r_0*=5 м, f=0,3.* Відносні траєкторії частинки, яка попадає на поверхню циліндра біля його найвищої прямолінійної твірної зображено на рис. 3.9.

Частинка здійснює коливальний рух в напрямі, перпендикулярному твірним циліндра – в напрямі лінії найбільшого нахилу. В залежності від точки попадання частинка рухається в одну або в іншу сторону, причому амплітуда коливань зростає. Відносний рух частинки чутливий до частоти коливань *ω*: при її зростанні з *10* c^{-1} до *11* c^{-1} довжина пройденого шляху суттєво збільшується (див. рис. 3.9).

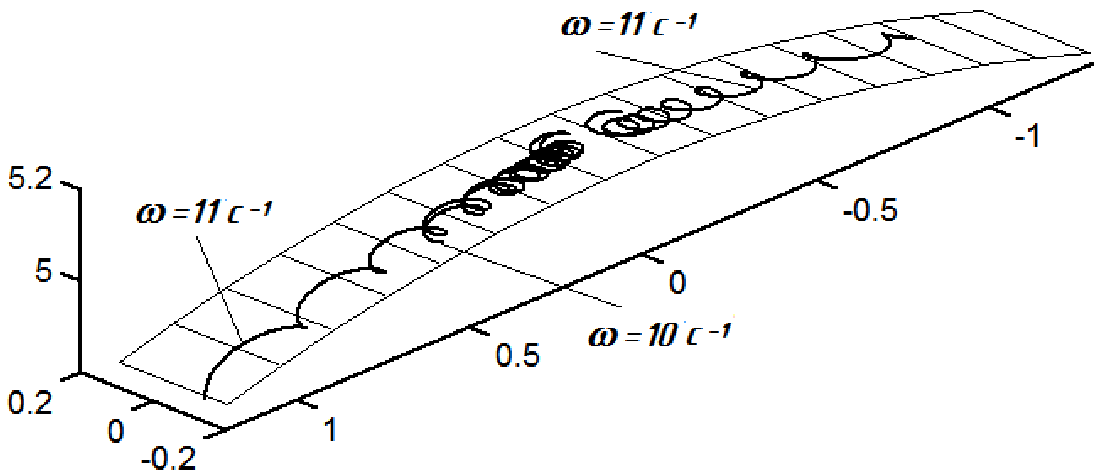


Рис. 3.9. Траєкторії відносного руху частинки по поверхні горизонтального циліндра, який здійснює коливальний рух протягом 5 *с* при наступних його параметрах: r_0=*5 м; r=0,05 м; f=0,3*

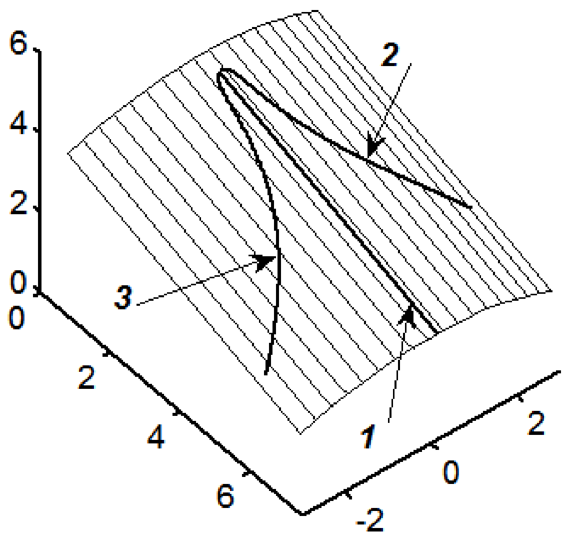


Рис. 3.10. Траєкторії руху частинки (*f=0,3*) по нерухомому циліндру (r_0=*5 м*), нахиленому під кутом тертя $\beta=arctg\ f=16{,}3^0$ до горизонтальної площини:

1 – початкова швидкість руху частинки задана вздовж найвищої прямолінійної твірної циліндра;

2 – при $\alpha'=0{,}2$ і $u'=0$;

3 – при $\alpha'=-0{,}15$ і $u'=0{,}5$

<u>*Випадок другий.*</u> Циліндр нахилено під кутом β до горизонтальної площини і він є нерухомим ($\omega=0$).

Якщо кут β дорівнює куту тертя ($\beta=arctg\ f$), рух частинки залежить від початкових умов – напряму початкової швидкості. Якщо частинці надати початкову швидкість руху вздовж найвищої прямолінійної твірної циліндра, то вона із цією швидкістю і далі продовжуватиме рух по ній (див. траєкторію *1* на рис. 3.10). Чисельне інтегрування системи диференціальних рівнянь (3.37) підтверджує цей результат.

Якщо початкову швидкість надати в іншому напрямі, то траєкторія руху буде криволінійна і рух прискореним. Значення сталих інтегрування α' і u' задають величину швидкості в поперечному і поздовжньому напрямах в початковій точці. На рис. 3.10 зображено ще дві траєкторії, які починаються зі спільної точки на верхній твірній циліндра. Траєкторія *1* побудована при $\alpha'=0,2$ і $u'=0$, траєкторія *2* – при $\alpha'=-0,15$ і $u'=0,5$.

Якщо кут нахилу циліндра менший кута тертя ($\beta<arctg\, f$), то існують ділянки на його поверхні, коли початкова швидкість зменшується до нуля, тобто частинка зупиняється або ж не починає рух зі стану спокою.

Якщо кут нахилу циліндра більший кута тертя ($\beta>arctg\, f$), то частинка починає розганятися з будь-якої точки поверхні незалежно від величини початкової швидкості.

Випадок третій. Циліндр нахилено під кутом β до горизонтальної площини і він здійснює поступальні коливання.

Як було показано у першому випадку (див. рис. 3.9), при відсутності кута нахилу циліндра частинка ковзає по ньому у поперечному напрямі. Цей випадок ($\beta=0^0$) також показано на горизонтальній проекції (див. рис. 3.11) при ω = $10\ с^{-1}$.

Напрям просування частинки в коливальному русі значною мірою залежить від кута нахилу β циліндра. Зміна кута нахилу циліндра всього на *1* градус суттєво відхиляє траєкторію руху частинки в сторону нахилу (див. рис. 3.11, на якому лінія нахилу найвищої твірної циліндра спрямована в сторону горизонтальної площини і позначена стрілкою). При збільшенні кута β напрям просування частинки в коливальному русі все більше наближається до верхньої твірної циліндра.

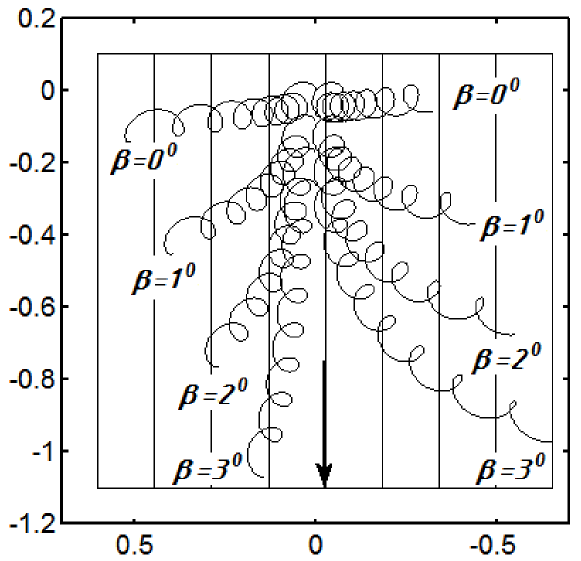
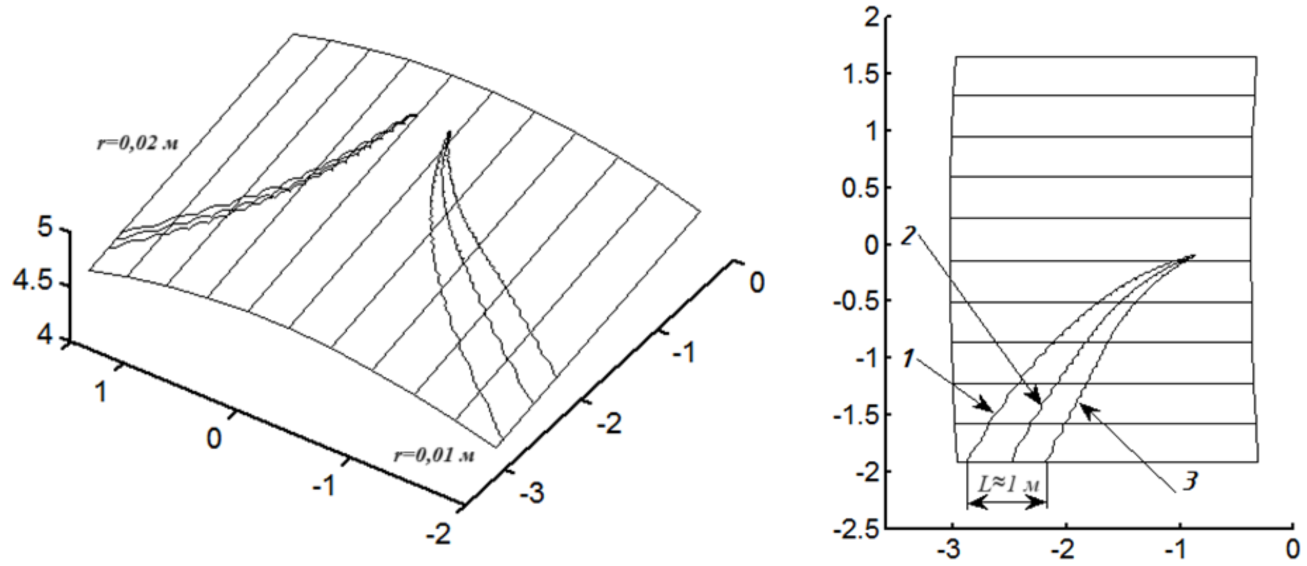


Рис. 3.11. Траєкторії відносного руху частинки по циліндру, нахиленому під різними кутами β ($r_0=5$ *м*; $r=0,05$ *м*; $f=0,3$; $\omega = 10\ с^{-1}$)

З’ясуємо вплив на траєкторію відносного руху частинки коефіцієнта тертя f. На рис. 3.12 побудовані траєкторії для частинок із різним коефіцієнтом тертя ($f=0,25$; $f=0,3$; $f=0,35$). Було прийнято наступні параметри циліндра: радіус r_0*=5 м* і кут його нахилу $\beta=10^0$. Частота коливань ω становила $20\ c^{-1}$.

На рис. 3.12,а побудовані траєкторії для частинок із різним коефіцієнтом тертя і з різними значеннями радіусів *r* кіл, які описують точки циліндра при його коливальному русі. Значення коефіцієнта тертя *f* було прийнято в межах від *0,25* до *0,35*. Ліворуч на рис. 3.12,а побудовані траєкторії для *r=0,02 м,* які майже зливаються. Якщо ж радіус *r* коливань зменшити до *0,01 м*, то траєкторії відносного руху частинок з різними коефіцієнтами тертя по мірі їх ковзання по поверхні циліндра віддаляються одна від одної на значну відстань (див. рис. 3.12,а праворуч).



а) б)

Рис. 3.12. Траєкторії відносного руху частинок із різними коефіцієнтами тертя по поверхні похилого циліндра (r_0*=5 м;* $\beta=10^0$; $\omega = 20\ c^{-1}$): *1 – f=0,25; 2 – f=0,3; 3 – f=0,35*:

а) *r=0,02 м* (ліворуч) і *r=0,01 м* (праворуч);

б) траєкторії частинок на горизонтальній проекції при *r=0,01 м*

На рис. 3.12,б зображено поверхню циліндра і траєкторії руху частинок по ньому при *r=0,01 м*. Цифрами позначено траєкторії для частинок із різним коефіцієнтом тертя: *1 – f=0,25; 2 – f=0,3; 3 – f=0,35*. Різниця *L* у відстані між крайніми точками у момент сходу частинок із обмеженого відсіку циліндра становить приблизно *1 м*.

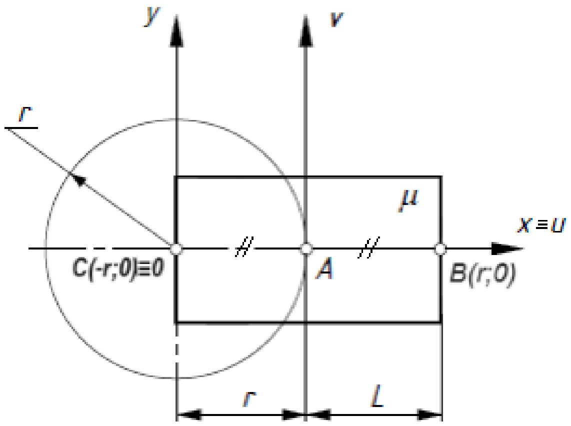
Таким чином, можна підібрати такі параметри циліндра і його коливання, які забезпечать сепарування матеріалу в залежності від його фрикційних властивостей.

3.1.3. Рух частинки по горизонтальній площині, яка поєднує поступальний і обертальний рухи

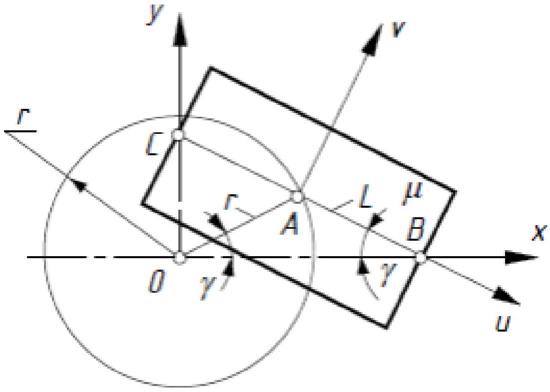
Рухома шорстка площина у якості робочого органу має місце у вібраційних та комбінованих транспортувальних системах для переміщування сипких або дрібнодисперсних матеріалів з оптимальним розподілом сил, у механізмах подачі та дозування, мішалках та змішувачах без надмірного механічного впливу, що може пошкодити структуру сировини. При цьому площина часто здійснює не лише простий рух, а комбінацію поступального та обертального рухів (складний рух). Поєднання цих рухів забезпечує рівномірний розподіл навантажень, зменшення пульсацій і коливань, що сприяє підвищенню ефективності роботи обладнання та зниженню зносу механізмів. Для дослідження такого руху також можуть бути застосовані параметричні рівняння у функції часу.

Нехай частинка рухається по горизонтальній шорсткій площині, яка здійснює складні коливання: переміщення точки площини по колу зі сталою кутовою швидкістю відносно його центра і одночасне обертання площини навколо цієї точки в протилежну сторону з тією ж кутовою швидкістю. Це є частковим випадком руху горизонтальної площини, коли одна фіксована точка цієї площини описує коло в горизонтальній площині, а друга здійснює зворотно-поступальний рух в цій же площині.

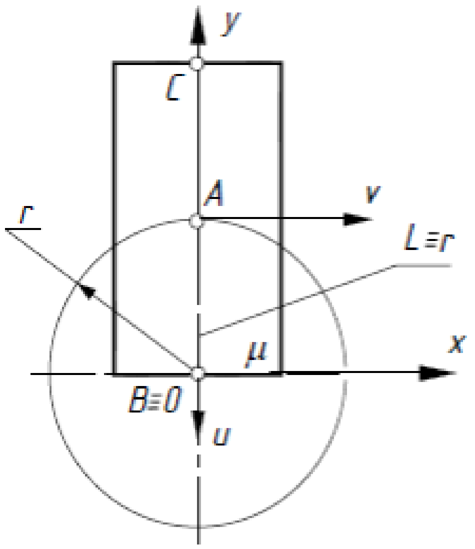
На рис. 3.13 рухома площина μ зображена прямокутником, виділеним потовщеними відрізками. Вона віднесена до прямокутної системи Auv. Переміщення рухомої площини μ здійснюється по відношенню до нерухомої системи координат Oxy.



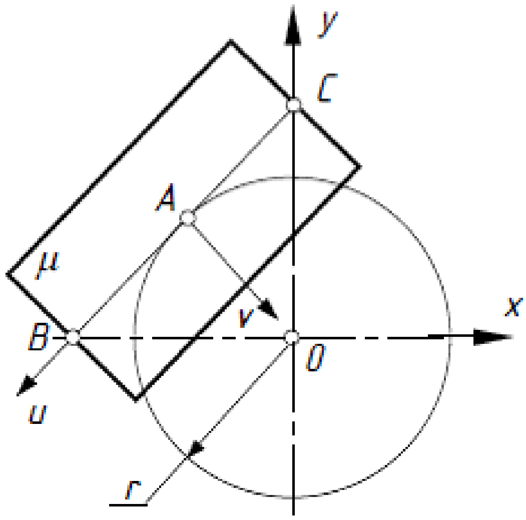
а)



б)



в)



г)

Рис. 3.13. Переміщення площини μ:

а) кут $\gamma=0°$;

б) кут $\gamma=30°$;

в) кут $\gamma=90°$;

г) кут $\gamma=135°$

На початку переміщення площини μ осі Au і Ox збігаються, а осі Oy і Av паралельні і зміщені на величину r радіуса кола (див. рис. 3.13,а), по якому буде рухатися початок координат рухомої площини μ. Відрізок $r=OA$ можна вважати кривошипом, а відрізок $L=AB$ – повзуном. Вони мають однакові довжини. До повзуна AB нерухомо прикріплена площина μ, яка буде рухатися разом із ним. При повороті кривошипа *OA* проти годинникової стрілки на кут γ (див. рис. 3.13,б) повзун *AB* повернеться на кут $-\gamma$ за годинниковою стрілкою по відношенню до нерухомої системи координат *Oxy*. Це випливає з того, що за умовою точка *B* має рухатися по осі *Ox* і *OA=AB*, отже трикутник *OAB* рівнобедрений і кути при основі рівні.

Приймаючи кут γ за незалежну змінну, запишемо параметричні рівняння кола – множини положень точки *A* кривошипа *AB*:

$$x_A = r\cos\gamma\,; \qquad (3.38)$$
$$y_A = r\sin\gamma.$$

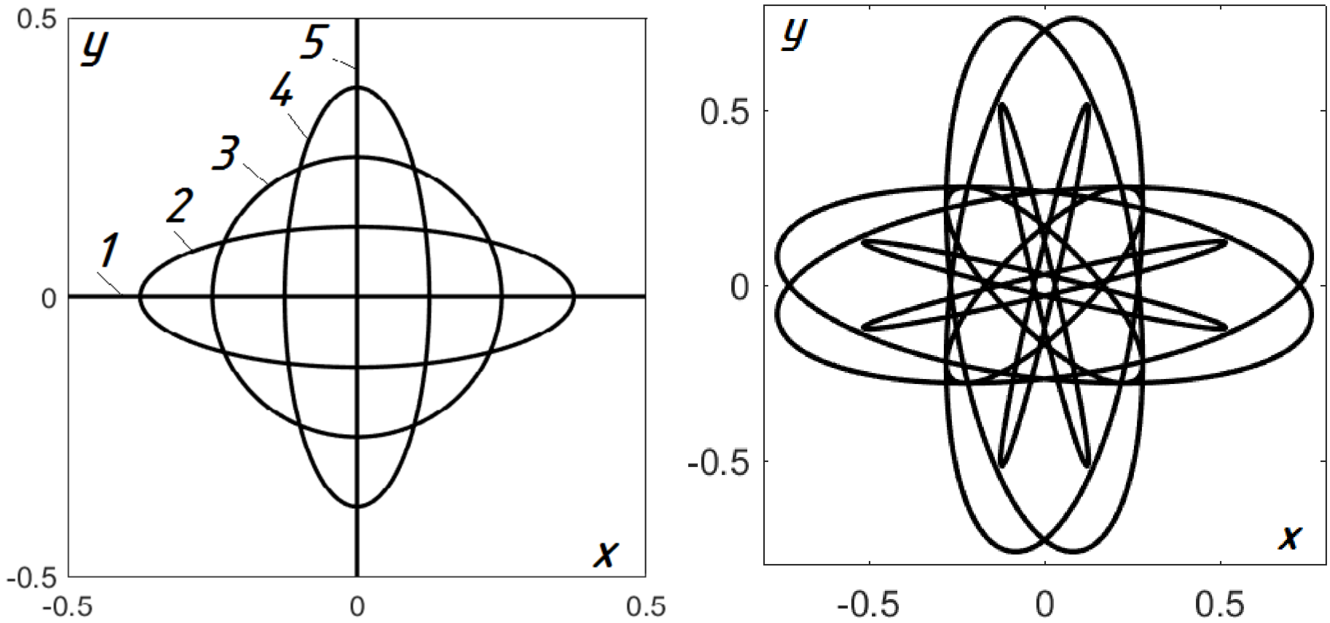
Поворот рухомої системи *Auv* по відношенню до нерухомої *Oxy* має вигляд:

$$x_{uv} = u\cos(-\gamma) - v\sin(-\gamma)\,; \qquad (3.39)$$
$$y_{uv} = u\sin(-\gamma) + v\cos(-\gamma).$$

Будемо вважати, що кривошип *OA* обертається зі сталою кутовою швидкістю ω, отже $\gamma=\omega t$, де t – час. Приймаючи це до уваги, додамо два рухи (3.38) і (3.39) і отримаємо параметричні рівняння положень точок рухомої площини μ, заданих координатами u, v, в проекціях на нерухому площину *Oxy*:

$$x = (r+u)\cos\omega\,t + v\sin\omega\,t; \qquad (3.40)$$
$$y = (r-u)\sin\omega\,t + v\cos\omega\,t.$$

Точка *B* в рухомій системі має координати: $u=AB=r$, $v=0$. Після їх підстановки у рівняння (3.40) отримаємо $y=0$ – точка *B* ковзає по осі *Ox*. Точка *C* повзуна має координати $u=-r$, $v=0$ – вона ковзає по осі *Oy*. Точка *A* описує коло, всі інші точки описують еліпси. На рис. 3.14 побудовані абсолютні траєкторії окремих нерухомих точок рухомої площини μ при $r=0{,}25$ *м*.



а) б)

Рис. 3.14. Абсолютні траєкторії точок в системі Oxy, які є нерухомими по відношенню до рухомої системи координат Auv, при $r=0,25$ *м*:

а) траєкторії точок, розташованих на відрізку AB (при $v=0$): *1* – точки B ($u=0,25$), *2* – $u= 0,125$; 3 – точки A ($u=0$), *4* – $u= –0,125$; *5* – точки C ($u= –0,25$);

б) траєкторії точок, розташованих на площині μ при попередніх значеннях координати u і значеннях координати $v=\pm 0,125$

Однак частинка при попаданні на площину μ почне ковзати по ній, отже координати u і v будуть змінними і залежними від часу t: $u=u(t)$ і $v=v(t)$. Ці залежності опишуть лінію в рухомій системі Auv, по якій ковзає частинка – відносну траєкторію. Для того, щоб знайти невідомі залежності $u=u(t)$ і $v=v(t)$, складемо рівняння руху у векторному вигляді (2.3). Сила ваги mg і сила реакції R діють у вертикальному напрямі і врівноважені між собою, отже у площині діє тільки одна сила тертя $F=fmg$. Вектор її дії спрямований по дотичній до відносної траєкторії в протилежну сторону відносної швидкості.

Проекції одиничного вектора відносної швидкості в системі Auv без урахування повороту запишуться:

$$\left[\frac{u'}{\sqrt{u'^2+v'^2}};\qquad \frac{v'}{\sqrt{u'^2+v'^2}}\right]. \tag{3.41}$$

Щоб привести одиничний вектор (3.41) відносної швидкості у відповідність до нерухомої системи координат *Oxy*, його потрібно повернути на кут –*γ* за формулами (3.39). Після цього отримаємо:

$$\left[\frac{u'\cos\omega t+v'\sin\omega t}{\sqrt{u'^2+v'^2}};\quad \frac{v'\cos\omega t-u'\sin\omega t}{\sqrt{u'^2+v'^2}}\right]. \tag{3.42}$$

Складові абсолютної швидкості знаходимо диференціюванням абсолютної траєкторії (3.40), з урахуванням того, що $u=u(t)$ і $v=v(t)$:

$$\begin{aligned} x' &= (v'-\omega u-\omega r)\sin\omega t+(u'+\omega v)\cos\omega t;\\ y' &= (v'-\omega u+\omega r)\cos\omega t-(u'+\omega v)\sin\omega t. \end{aligned} \tag{3.43}$$

Величина відносної швидкості є геометричною сумою похідних: $V_r = \sqrt{u'^2+v'^2}$.

Складові абсолютного прискорення отримаємо диференціюванням виразів (3.43):

$$\begin{aligned} x'' &= [v''-\omega(2u'+\omega v)]\sin\omega t+[u''+\omega(2v'-\omega u-\omega r)]\cos\omega t;\\ y'' &= [v''-\omega(2u'+\omega v)]\cos\omega t-[u''+\omega(2v'-\omega u+\omega r)]\sin\omega t. \end{aligned} \tag{3.44}$$

Векторне рівняння руху (2.3) розпишемо в проекціях на осі нерухомої системи координат, маючи на увазі, що сила тертя $F=fmg$ спрямована в протилежну сторону від вектора (3.42):

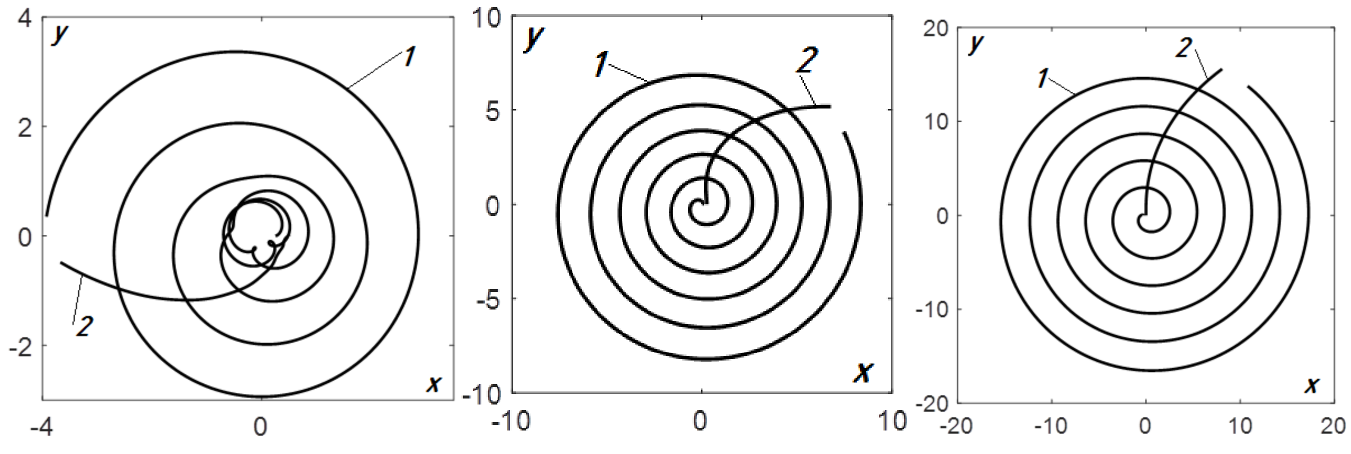
$$mx'' = -fmg\frac{u'\cos\omega\, t + v'\sin\omega\, t}{\sqrt{u'^2 + v'^2}};$$
$$my'' = -fmg\frac{v'\cos\omega\, t - u'\sin\omega\, t}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}. \quad (3.45)$$

Систему диференціальних рівнянь руху частинки по площині отримаємо підстановкою у (3.45) виразів абсолютного прискорення (3.44) і розв’язання отриманих виразів відносно других похідних:

$$u'' = -\frac{fgu'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} + \omega(\omega r\cos 2\,\omega t - 2v' + \omega u);$$
$$v'' = -\frac{fgv'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}} + \omega(\omega r\sin 2\,\omega t + 2u' + \omega v). \quad (3.46)$$

Знайдені чисельними методами із (3.46) залежності $u=u(t)$ і $v=v(t)$ у вигляді графіків представляють собою траєкторію відносного руху частинки – слід її ковзання по площині μ. Параметричні рівняння (3.40) з урахуванням цих залежностей дозволяють побудувати траєкторію абсолютного руху. На рис. 3.15 цифрою *1* позначено відносну траєкторію ковзання частинки по площині μ, а цифрою *2* – абсолютну траєкторію її руху по відношенню до нерухомої системи координат *Oxy*. Частинка подавалася на площину μ в точках *B*, *A* і *C* (див. рис. 3.13,а). З часом рух частинки ставав прогнозованим: відносний – по спіралі, а абсолютний – по кривій, яка перетинає витки спіралі приблизно під однаковим кутом.

На рис. 3.16,а,б частинка подавалася на площину μ вище і нижче від точки *B* ($v=\pm 0,1$), а на рис. 3.16,в – при $r=0$ (обертальному русі площини). Якщо при коливальному русі площини з її поворотом відносний рух частинки на початковому етапі був дещо хаотичним, оскільки спіраль була певною мірою спотворена, то при обертальному русі траєкторія відносного руху (спіраль) має правильну форму.



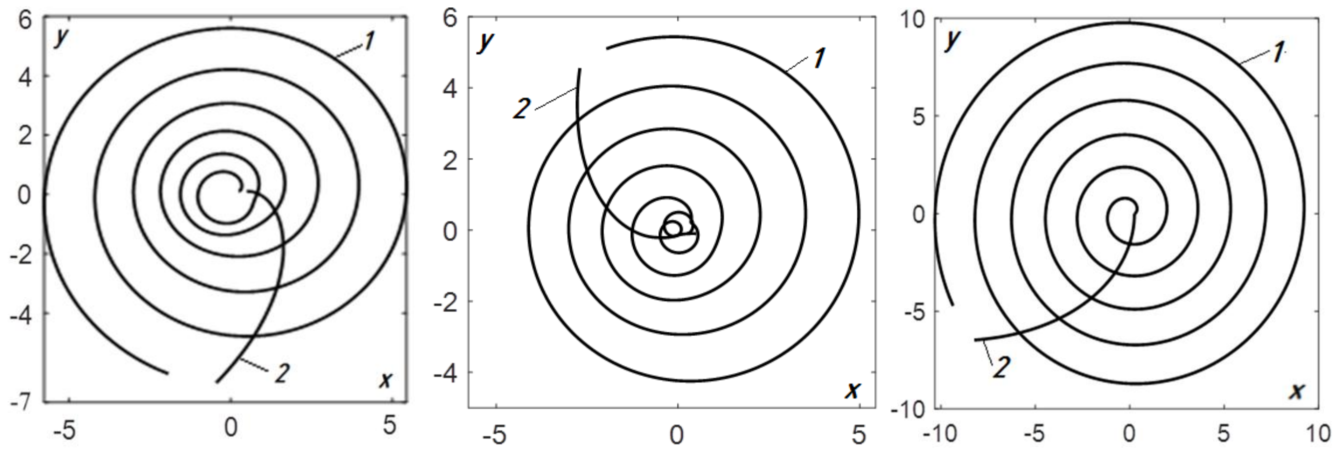
а) б) в)

Рис. 3.15. Відносна – *1* і абсолютна – *2* траєкторії руху частинки при $r=0{,}25$ *м*, $\omega=15\ с^{-1}$ і $v=0$:

а) $u=0{,}25$ – точка *B*;

б) $u=0$ – точка *A;*

в) $u=-0{,}25$ – точка *C*



а) б) в)

Рис. 3.16. Відносна – *1* і абсолютна – *2* траєкторії руху частинки при $\omega=15\ с^{-1}$ і $u=0{,}25$:

а) $u=r=0{,}25$, $v=0{,}1$;

б) $u=r=0{,}25$, $v=-0{,}1$;

в) $r=0$, $v=0{,}1$ – обертальний рух площини

3.2. Аналітичний опис руху частинки по поверхні, яка здійснює обертальний рух

Теорія руху частинок по поверхнях обертання, які здійснюють обертальний рух [27, 44, 45, 101], використовуються для проєктування різноманітних пристроїв. Достатньо вивчено рух частинок всередині вертикального конуса, що обертається навколо вертикальної осі [23, 105, 117, 182, 242], а також рух частинок по горизонтальному диску [143, 189, 224, 232, 233, 315], який можна розглядати, як частковий випадок конуса.

Характер руху частинки по поверхні обертання залежить від форми її твірної. Наприклад, при достатній кутовій швидкості обертання конуса частинка піднімається по його поверхні необмежено. Для інших поверхонь частинка може «залипнути» на певній висоті.

У підрозділі 3.1.2 було досліджено рух частинки по зовнішній поверхні циліндра, який здійснює поступальні коливання в горизонтальних площинах. Часто у якості робочої поверхні машин і обладнання використовується внутрішня поверхня циліндра [38, 84, 120, 158, 196, 236, 266, 267, 273, 299, 306]. При цьому найпоширенішим випадком руху циліндричних робочих органів є обертальний [14, 48, 51–53, 75, 85, 100, 110–112, 142, 148, 181, 184, 190, 198, 200, 294, 295]. Внутрішня поверхня циліндра, який обертається навколо осі, встановленої під кутом до горизонту, зазнає унікальної взаємодії сил (відцентрової, гравітаційної та інерційної), що формує особливий режим контакту з матеріалом всередині циліндра. Така рухома поверхня у якості робочого органу зустрічається в барабанних міксерах, транспортувальних системах тощо. Доцільно дослідити закономірності руху частинки по внутрішній поверхні циліндра, який обертається навколо осі, встановленої під кутом до горизонту. Виведемо рівняння закону руху частинки у вигляді параметричних рівнянь у функції часу.

Параметричні рівняння циліндра із горизонтальною віссю, спрямованою вздовж осі OX, мають вигляд:

$$X = u;$$
$$Y = r_0 \sin\alpha; \qquad (3.47)$$
$$Z = -r_0 \cos\alpha,$$

де $r_0 = \mathrm{const}$ – радіус циліндра, м;
α і u – кутова і лінійна (довжина прямолінійної твірної циліндра) координати поверхні відповідно (незалежні змінні).

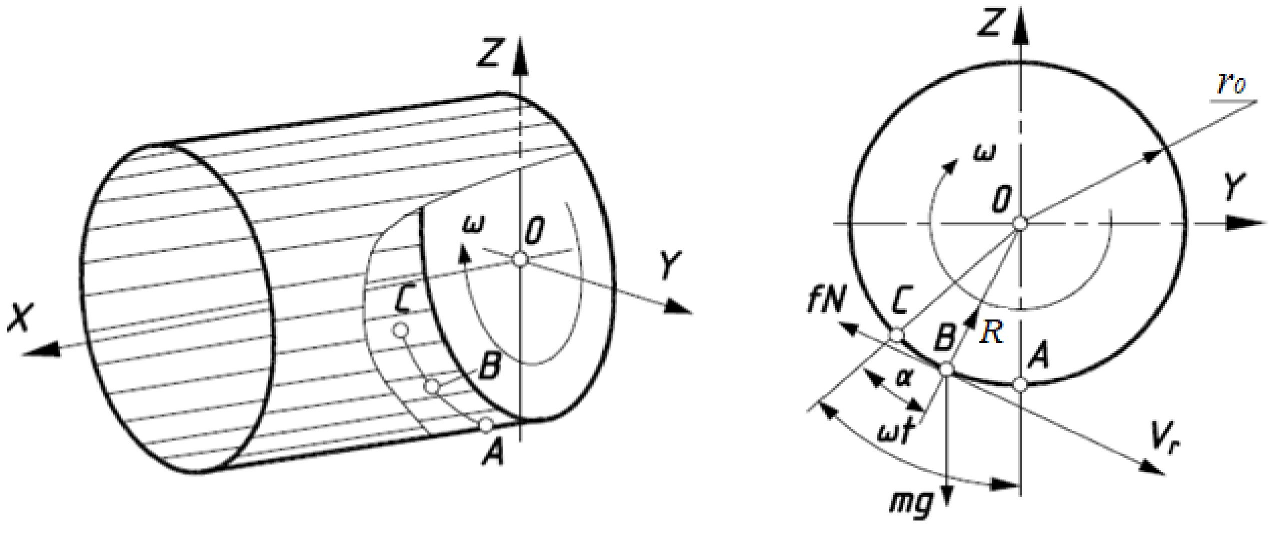
3.2.1. Рух частинки по внутрішній поверхні горизонтального циліндра

Нехай на початку руху частинка знаходиться в точці *A* на нижній твірній циліндра (див. рис. 3.17), що забезпечується знаком «–» в останньому рівнянні (3.47). Будемо обертати циліндр навколо осі зі сталою кутовою швидкістю ω. За час t циліндр повернеться на кут ωt і нижня твірна циліндра переміститься в точку *C*. За цей же час частинка теж переміститься по поверхні циліндра, але точки *C* не досягне, оскільки буде по ньому ковзати (див. рис. 3.17,б). Припустимо, вона досягла точки *B*, що відповідає куту α. Оскільки вісь обертання циліндра горизонтальна, то очевидно, що траєкторією ковзання частинки буде дуга кола. Якщо циліндр нахилити, то виникне складова сили ваги, яка змусить частинку ковзати ще і у напрямі осі *OX*. Спочатку розглянемо рух частинки по поверхні горизонтального циліндра.

Аналогічно випадку, викладеному у підрозділі 3.1.2, незалежні змінні α і u поверхні мають бути зв'язані функціональною залежністю від часу t. У такому випадку рівняння (3.47) перетворяться у рівняння однієї змінної, тобто опишуть лінію на поверхні циліндра. Ця лінія є траєкторію ковзання, а залежності $\alpha=\alpha(t)$ і $u=u(t)$ – шуканими. Для цього потрібно скласти систему диференціальних рівнянь руху частинки в проекціях на осі системи координат *OXYZ*.

Знайдемо напрямні косинуси прикладених до частинки сил. Сила ваги спрямована вниз, отже проекції напрямного вектора мають вигляд:

$$[0; \quad 0; \quad -1]. \tag{3.48}$$



а) б)

Рис. 3.17. Графічні ілюстрації до складання рівнянь руху частинки по внутрішній поверхні горизонтального циліндра, який обертається навколо своєї осі:

а) аксонометричне зображення циліндра;

б) проекція циліндра, коли вісь *OX* спрямована на спостерігача та прикладені до частинки в точці *B* сили

Сила тертя $f{\cdot}R$ спрямована в сторону, протилежну вектору швидкості V_r відносного руху (ковзання). Для знаходження швидкості V_r відносного руху продиференціюємо рівняння (3.47) по часу t. При цьому маємо на увазі, що $\alpha=\alpha(t)$ і $u=u(t)$ – рівняння (3.47) є уже не рівняннями циліндра, а рівняннями лінії на ньому (відносної траєкторії). В рівняннях відносної траєкторії відповідно до прийнятих позначень перейдемо від прописних літер до строчних із індексом «*r*»:

$$\begin{aligned} x_r' &= u'; \\ y'_r &= r_0\alpha'\cos\alpha; \\ z'_r &= r_0\alpha'\sin\alpha. \end{aligned} \tag{3.49}$$

Величина швидкості ковзання частинки по циліндру у відносному русі була отримана раніше (3.32). Продублюємо вираз для зручності викладення:

$$V_r = \sqrt{x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^2} = \sqrt{u'^2 + r_0^2 \alpha'^2}. \tag{3.50}$$

Одиничний вектор дотичної до траєкторії відносного руху в проекціях на осі системи *OXYZ* одержимо діленням проекцій (3.49) на величину вектора (3.50). Враховуючи те, що сила тертя $f \cdot R$ спрямована в протилежну сторону вектору відносної швидкості V_r, запишемо одиничний напрямний вектор дії сили тертя з протилежним знаком:

$$\left[-\frac{u'}{\sqrt{u'^2 + r_0^2 \alpha'^2}}; \quad -\frac{R\alpha' \cos\alpha}{\sqrt{u'^2 + r_0^2 \alpha'^2}}; \quad -\frac{R\alpha' \sin\alpha}{\sqrt{u'^2 + r_0^2 \alpha'^2}} \right]. \tag{3.51}$$

Реакція R поверхні спрямована по нормалі поверхні – від точки на циліндрі до осі його обертання (див. рис. 3.17,б). Якщо радіус-вектор точки на циліндрі визначається другим і третім виразом рівнянь (3.47), то реакція поверхні визначиться цими ж виразами з протилежним знаком. Скоротивши вирази на r_0, запишемо проекції одиничного вектора реакції R:

$$[0; \quad -\sin\alpha; \quad \cos\alpha]. \tag{3.52}$$

При обертанні поверхні циліндра з кутовою швидкістю ω за час t він повернеться на кут $\theta = -\omega \cdot t$ (за годинниковою стрілкою). Твірна циліндра, яка була в нижньому положенні в точці A, займе положення в точці C (див. рис. 3.17,б). Поворот циліндра (3.47) навколо осі OX на кут $\theta = -\omega \cdot t$ має вигляд:

$$X = u;$$
$$Y = r_0 \sin\alpha \cos\theta + r_0 \cos\alpha \sin\theta; \quad (3.53)$$
$$Z = r_0 \sin\alpha \sin\theta - r_0 \cos\alpha \cos\theta.$$

Після спрощень із урахуванням $\theta = -\omega \cdot t$ рівняння (3.53) набувають вигляду:

$$X = u;$$
$$Y = -r_0 \sin(\omega t - \alpha); \quad (3.54)$$
$$Z = -r_0 \cos(\omega t - \alpha).$$

Рівняння (3.54) при $\alpha = \alpha(t)$ і $u = u(t)$ є рівняннями абсолютної траєкторії руху частинки. Циліндр повернувся на кут $\theta = -\omega t$, а частинка за цей час, ковзаючи по циліндру в протилежну сторону, повернулася на кут $\alpha = \alpha(t)$ і зайняла положення в точці *B* (див. рис. 3.17,б). Знайдемо абсолютну швидкість частинки диференціюванням рівнянь (3.54), перейшовши до строчних літер із індексом «*a*»:

$$x_a' = u';$$
$$y_a' = -r_0(\omega - \alpha')\cos(\omega t - \alpha); \quad (3.55)$$
$$z_a' = r_0(\omega - \alpha')\sin(\omega t - \alpha).$$

Проекції вектора абсолютного прискорення знаходимо диференціюванням рівнянь (3.54):

$$x_a'' = u'';$$
$$y_a'' = r_0(\omega - \alpha')^2 \sin(\omega t - \alpha) + r_0 \alpha'' \cos(\omega t - \alpha); \quad (3.56)$$
$$z_a'' = r_0(\omega - \alpha')^2 \cos(\omega t - \alpha) - r_0 \alpha'' \sin(\omega t - \alpha).$$

Одиничні напрямні вектори дії сили тертя $f \cdot R$ (3.51), і реакції R поверхні (3.52) знайдені для нерухомого циліндра. Оскільки поверхня повертається на кут $\theta = -\omega \cdot t$, вказані вектори теж потрібно повернути на цей кут, щоб вони відповідали розташуванню частинки. Поворот здійснюємо аналогічно повороту поверхні. Проекції вказаних векторів після повороту запишуться:

– одиничного напрямного вектора дії сили тертя $f{\cdot}R$:

$$\left[-\frac{u'}{\sqrt{u'^2+r_0^2\alpha'^2}};\quad -\frac{r_0\alpha'\cos(\omega t-\alpha)}{\sqrt{u'^2+r_0^2\alpha'^2}};\quad \frac{r_0\alpha'\sin(\omega t-\alpha)}{\sqrt{u'^2+r_0^2\alpha'^2}}\right]. \tag{3.57}$$

– одиничного напрямного вектора дії сили реакції R:

$$[0;\quad \sin(\omega t-\alpha);\quad \cos(\omega t-\alpha)]. \tag{3.58}$$

Складемо векторне рівняння (2.3) в проекціях на осі нерухомої системи координат *OXYZ* для горизонтального циліндра, оскільки відомі проекції вектора абсолютного прискорення (3.56) і напрямні вектори прикладених сил: ваги частинки *mg* (3.48), тертя $f{\cdot}R$ (3.57) і реакції R (3.58):

$$\begin{aligned} mx''_a &= -fR\frac{u'}{\sqrt{u'^2+r_0^2\alpha'^2}};\\ my''_a &= -fR\frac{r_0\alpha'\cos(\omega t-\alpha)}{\sqrt{u'^2+r_0^2\alpha'^2}}+R\sin(\omega t-\alpha);\\ mz''_a &= -mg+fR\frac{r_0\alpha'\sin(\omega t-\alpha)}{\sqrt{u'^2+r_0^2\alpha'^2}}+R\cos(\omega t-\alpha). \end{aligned} \tag{3.59}$$

При підстановці у (3.59) виразів прискорення (3.56) отримаємо систему трьох рівнянь із трьома невідомими залежностями: $\alpha=\alpha(t)$, $u=u(t)$ і $R=R(t)$. Вона має застосовуватися у разі задання початкової швидкості u' ковзання частинки в напрямі осі *OX*. При $u''=u'=0$ (при ковзанні частинки по колу) перше рівняння (3.59) перетворюється у тотожність $0=0$. Розв'язавши систему двох інших рівнянь відносно $\alpha''=\alpha''(t)$ і $R=R(t)$, отримаємо:

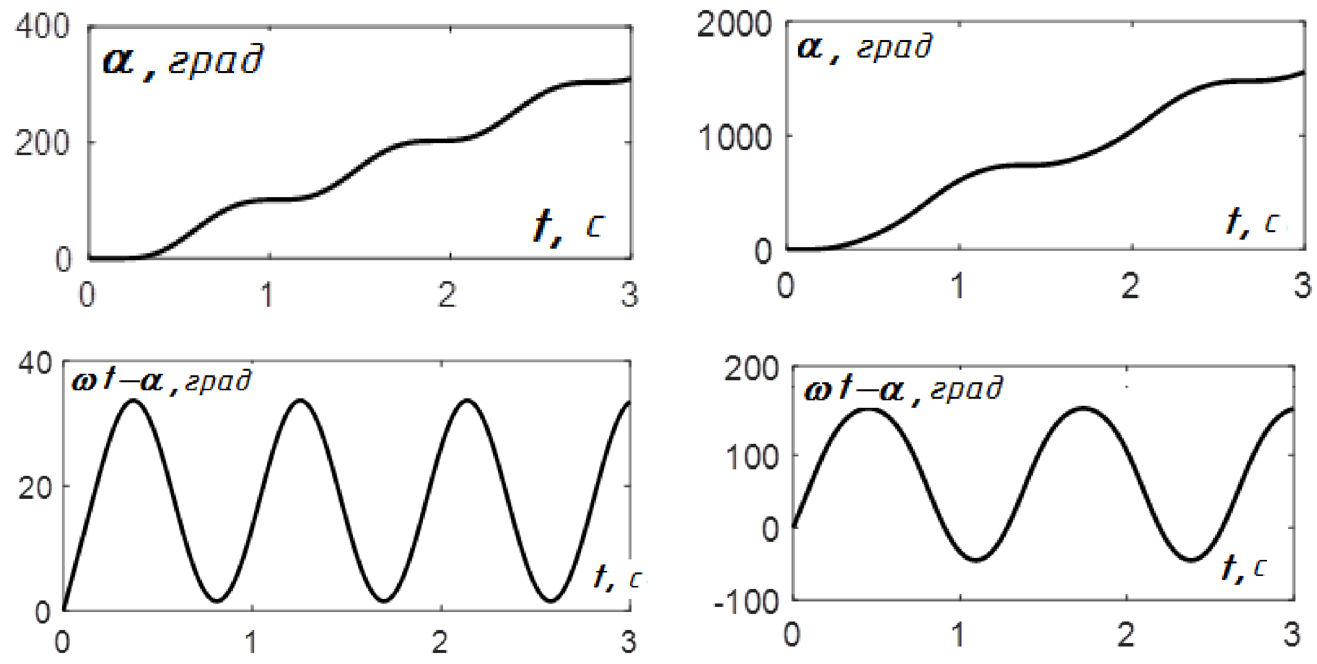
$$\alpha'' = \frac{g}{r_0}[\sin(\omega t - \alpha) - f\cos(\omega t - \alpha)] - f(\omega - \alpha')^2; \tag{3.60}$$

$$R = m[r_0(\omega - \alpha')^2 + g\cos(\omega t - \alpha)]. \tag{3.61}$$

Рівняння (3.60) є диференціальним і може бути розв'язане самостійно. Можна припустити, що при обертанні горизонтального циліндра частинка, що знаходиться в нижній точці *А* (див. рис. 3.17,б), буде обертатися з циліндром без ковзання до точки *С*, а потім буде ковзати вниз до певної точки і цей процес буде повторюватися. Чисельне інтегрування рівняння (3.60) показало, що таке припущення справедливе тільки для невеликих кутових швидкостей.

Важливу роль при чисельному інтегруванні відіграють початкові умови, від яких, залежить характер руху частинки. Вихідними умовами було передбачено, що частинка в початковий момент знаходиться на нижній твірній циліндра і кутова швидкість ковзання відсутня ($\alpha=\alpha'=0$). На рис. 3.18 побудовані графіки зміни кінематичних характеристик руху частинки протягом *3 с* при $r_0=0,2$ *м*, $f=0,3$ і різних кутових швидкостях обертання циліндра. Вгорі побудовано графік зміни кута ковзання α, а внизу – різниці кутів $\omega t-\alpha$ (кута відхилення частинки). Горизонтальна ділянка графіка $\alpha=\alpha(t)$, яка періодично повторюється, свідчить про те, що в цей момент часу ковзання відсутнє, частинка «залипає» і обертається разом із циліндром. «Залипання» (підйом вгору) періодично чергується із ковзанням (спуском). Графік зміни різниці кутів $\omega t-\alpha$ показує амплітуду коливань у кутовому вимірі.

Із графіків видно, що амплітуда коливань частинки збільшується по мірі зростання кутової швидкості обертання циліндра. При $\omega=2$ $с^{-1}$ частинка при підйомі вгору повертається приблизно на $35°$ і опускається майже до нуля (до нижньої твірної). При $\omega=10$ $с^{-1}$ ці кути становлять відповідно $165°$ і $-40°$ – частинка коливається по колу, охоплюючи більше половини його дуги. При подальшому зростанні кутової швидкості ω обертання циліндра частинка практично «залипає» і обертається разом із ним.



а) б)

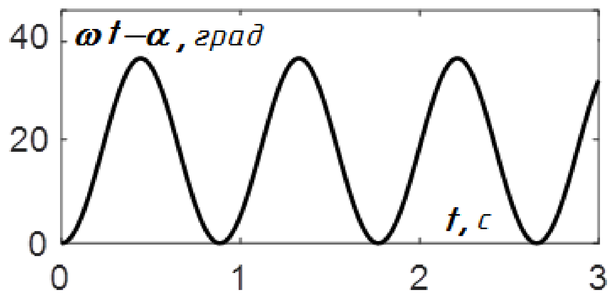
Рис. 3.18. Графіки зміни кута ковзання *α* і кута відхилення частинки *ω·t–α* від нульового значення в абсолютному русі по горизонтальному циліндру протягом *3 с* при $r_0=0,2$ *м*, $f=0,3$:

а) $\omega=2\ c^{-1}$;

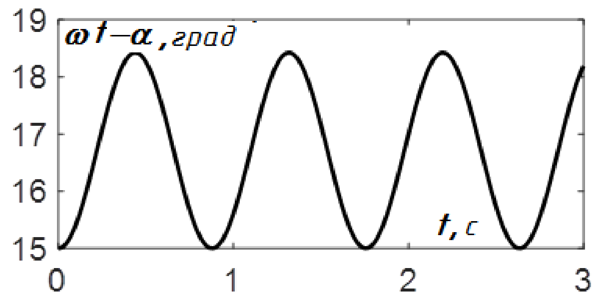
б) $\omega=10\ c^{-1}$

Якщо в початковий момент надати частинці кутової швидкості ковзання $\alpha'=\omega$ (на початку руху абсолютна швидкість її обертання дорівнює нулю), то подальший рух частинки відрізняється від розглянутих випадків. Для прикладу візьмемо кутову швидкість обертання циліндра $\omega=10\ c^{-1}$ (див. рис. 3.18,б, графік зображено внизу для початкових умов $\alpha=\alpha'=0$). Змінимо тільки одну початкову умову: $\alpha=0$, $\alpha'=\omega$. Така заміна суттєво змінює характер коливань – їх амплітуда зменшується приблизно в 5 разів (див. рис. 3.19,а).

Теоретичні дослідження показали, що при збільшенні кутової швидкості обертання циліндра частинка не «залипає», а коливається із тією ж амплітудою (в межах 0°…35°), тобто кутова швидкість обертання циліндра в такому випадку не впливає на амплітуду коливань. Однак друга вихідна умова (точка подачі частинки на поверхню), доповнена до першої, впливає.



а)



б)

Рис. 3.19. Графіки зміни кута відхилення частинки $\omega t–\alpha$ від нульового значення в абсолютному русі по горизонтальному циліндру при $\omega=10$ c^{-1} і різних початкових умовах інтегрування:

а) частинці надана початкова кутова швидкість ковзання $\alpha=0$, $\alpha'=\omega$;

б) частинка подається вище твірної циліндра в напрямі його обертання $\alpha = –15°$, $\alpha'=\omega$

На рис. 3.19,б побудовано аналогічний графік, коли $\alpha=–15°$ – в початковий момент частинка подається не в нижню точку циліндра, а вище в напрямі його обертання. Амплітуда коливань зменшується і знаходиться в межах *15°...18,5°*. При цьому в обох випадках (див. рис. 3.19,а,б) коливання відбуваються відносно середньої точки, яка в кутовому вимірі дорівнює приблизно *17°*.

Якщо вихідною умовою взяти цей кут ($\alpha=–17°$), амплітуда коливань практично зникає і частинка в абсолютному русі залишається нерухомою. Це підтверджується частковим розв’язком диференціального рівняння (3.60) для відповідних початкових умов.

Нехай розв’язком рівняння (3.60) є залежність $\alpha=\omega t+\alpha_o$. Тоді $\alpha'=\omega$, $\alpha''=0$. Підстановкою цих виразів у диференціальне рівняння (3.60) отримуємо просте рівняння:

$$-\sin\alpha_0 - f\cos\alpha_0 = 0, \quad \text{звідки} \quad \alpha_0 = -\mathrm{arctg}\, f. \qquad (3.62)$$

Відповідно до (3.62) кут α_o дорівнює кутові тертя частинки по поверхні циліндра. Для прийнятого значення $f=0,3$ кут $\alpha_o = –16,7°$. При дотриманні цих початкових умов ($\alpha'=\omega$ і $\alpha=\alpha_o= -\mathrm{arctg}\, f$) частинка буде ковзати по поверхні циліндра, залишаючись нерухомою в абсолютному русі на певній висоті від нижньої твірної, що в кутовому вимірі відповідає кутові тертя.

Адаптуємо запропонований підхід до випадку похилого циліндра.

3.2.2. Рух частинки по внутрішній поверхні похилого циліндра

Для отримання диференціальних рівнянь руху частинки по похилому циліндру, що обертається навколо власної осі, потрібно повернути циліндр, всі вектори сил та абсолютного прискорення. Поворот здійснюємо навколо осі OY на кут β проти годинникової стрілки, щоб напрям ковзання частинки вниз вздовж твірних циліндра збігався з напрямом осі OX. Вектор сили ваги не змінює свого напряму. Вектори решти сил і абсолютного прискорення жорстко прив'язані до поверхні циліндра або до ліній (траєкторій) на ньому, тому їх потрібно повернути аналогічно циліндру.

Після повороту на кут β отримаємо наступні вирази:

– параметричні рівняння циліндра:

$$\begin{aligned} X &= u\cos\beta - r_0 \sin\beta\cos\alpha; \\ Y &= r_0 \sin\alpha; \\ Z &= -u\cos\beta - r_0\cos\beta\sin\alpha; \end{aligned} \tag{3.63}$$

– проекції абсолютної траєкторії:

$$\begin{aligned} x_\alpha &= u\cos\beta - r_0\sin\beta\cos(\omega t-\alpha); \\ y_\alpha &= -r_0\sin(\omega t-\alpha); \\ z_\alpha &= -u\sin\beta - r_0\cos\beta\cos(\omega t-\alpha); \end{aligned} \tag{3.64}$$

– проекції абсолютного прискорення:

$$x_a'' = r_0 \sin\beta(\omega - \alpha')^2 \cos(\omega t - \alpha) + u'' \cos\beta - r_0 \alpha'' \sin\beta \sin(\omega t - \alpha);$$
$$y_a'' = r_0 (\omega - \alpha')^2 \sin(\omega t - \alpha) + r_0 \alpha'' \cos(\omega t - \alpha); \quad (3.65)$$
$$z_a'' = r_0 \cos\beta(\omega - \alpha')^2 \cos(\omega t - \alpha) - u'' \sin\beta - r_0 \alpha'' \cos\beta \sin(\omega t - \alpha).$$

– одиничного напрямного вектора дії сили тертя $f{\cdot}R$:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{r_0 \alpha' \sin\beta \sin(\omega t - \alpha) - u' \cos\beta}{\sqrt{u'^2 + r_0^2 \alpha'^2}}; \\ -\dfrac{r_0 \alpha' \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{u'^2 + r_0^2 \alpha'^2}}; \\ \dfrac{r_0 \alpha' \cos\beta \sin(\omega t - \alpha) + u' \sin\beta}{\sqrt{u'^2 + r_0^2 \alpha'^2}} \end{bmatrix}. \quad (3.66)$$

– одиничного напрямного вектора дії сили реакції R:

$$[\sin\beta \cos(\omega t - \alpha); \quad \sin(\omega t - \alpha); \quad \cos\beta \cos(\omega t - \alpha)]. \quad (3.67)$$

Система диференціальних рівнянь із урахуванням повернутих векторів (3.65 – 3.67) набуває вигляду:

$$m x_a'' = fR \frac{r_0 \alpha' \sin\beta \sin(\omega t - \alpha) - u' \cos\beta}{\sqrt{u'^2 + r_0^2 \alpha'^2}} + R \sin\beta \cos(\omega t - \alpha);$$
$$m y_a'' = -fR \frac{r_0 \alpha' \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{u'^2 + r_0^2 \alpha'^2}} + R \sin(\omega t - \alpha); \quad (3.68)$$
$$m z_a'' = -mg + fR \frac{r_0 \alpha' \cos\beta \sin(\omega t - \alpha) + u' \sin\beta}{\sqrt{u'^2 + r_0^2 \alpha'^2}} + R \cos\beta \cos(\omega t - \alpha).$$

Підставимо у (3.68) вирази прискорень (3.65) і розв’яжемо відносно $\alpha''=\alpha''(t)$, $u''=u''(t)$ і $R=R(t)$:

$$\alpha'' = \frac{g}{r_0}\cos\beta\,\sin(\omega t - \alpha) - \tag{3.69}$$

$$-\frac{f\alpha'}{\sqrt{u'^2 + r_0^2\alpha'^2}}[g\cos\beta\cos(\omega t - \alpha) + r_0(\omega - \alpha')^2];$$

$$u'' = g\sin\beta - \frac{fu'}{\sqrt{u'^2 + r_0^2\alpha'^2}}[g\cos\beta\cos(\omega t - \alpha) + r_0(\omega - \alpha')^2];$$

$$R = m[g\cos\beta\cos(\omega t - \alpha) + r_0(\omega - \alpha')^2].$$

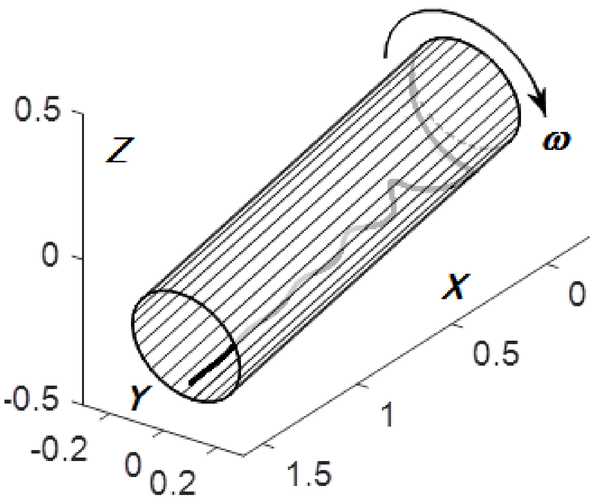
У випадку, коли $\beta=0$, частинка буде рухатися по внутрішній поверхні горизонтального циліндра, що обертається навколо власної осі. В такому випадку рівняння (3.69) повинні збігатися із рівняннями (3.60), (3.61). І справді, залежність сили реакції R для обох випадків стає однаковою. Щоб виконувалася рівність в середньому рівнянні системи (3.69) при $\beta=0$, необхідно стале значення параметра u: $u=const$. Це означає, що частинка буде рухатися по колу – поперечному перерізу циліндра. При підстановці $u'=0$ і $\beta=0$ в перше рівняння системи (3.69) ми отримаємо рівняння, яке точно збігається із рівнянням (3.60).

Дослідимо залежність кінематичних характеристик руху частинки по внутрішній поверхні циліндра від двох параметрів: кута нахилу β циліндра і кутової швидкості ω його обертання. На рис. 3.20 побудовані абсолютні траєкторії руху частинки для циліндра радіуса $r_0=0,2$ *м*, нахиленого під кутом $\beta=15°$ (меншим за кут тертя, який для $f=0,3$ становить $16,7°$), при кутових швидкостях його обертання 2 та 10 c^{-1}.

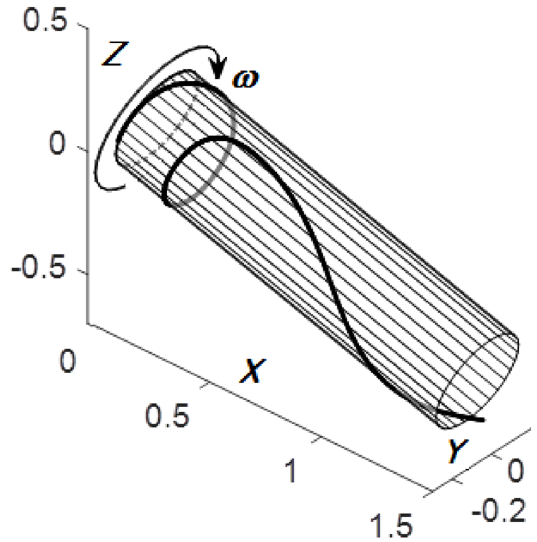
На рис. 3.21 побудовано графіки зміни швидкості $u'=V_z$ руху частинки в напрямі осі OX. В одному випадку (див. рис. 3.21,а) кут нахилу менше за кут тертя, у другому (див. рис. 3.21,б) – більше.

Аналіз зображень на рис. 3.20,а і 3.21,а показує, що рух частинки стабілізується, її швидкість в осьовому напрямі наближається до сталої величини, а траєкторія – до прямої лінії. Така стабілізація можлива до певної величини кутової швидкості обертання циліндра. На рис. 3.20,б побудовано абсолютну траєкторію частинки при

ω=*10 с*$^{-1}$, з якої видно, що амплітуда її коливань зростає. При подальшому зростанні кутової швидкості ω частинка практично «залипає» і обертається разом із циліндром.



а)

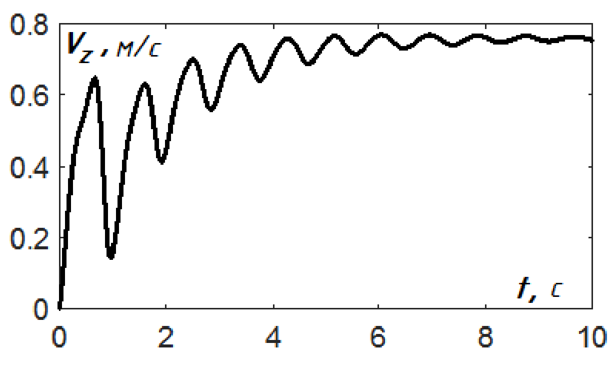


б)

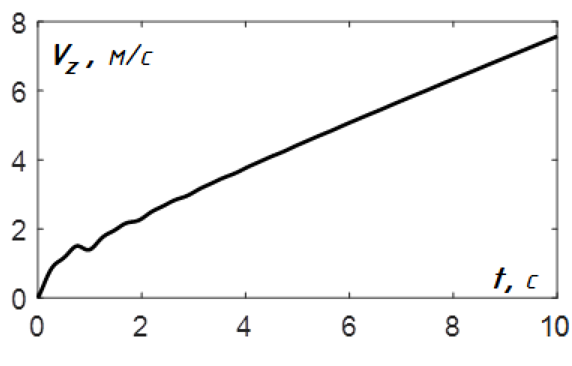
Рис. 3.20. Абсолютні траєкторії руху частинки по внутрішній поверхні циліндра радіуса r_0*=0,2 м*, нахиленого під кутом β*=15°* (меншим за кут тертя), при різних кутових швидкостях його обертання:

а) ω*=2 с*$^{-1}$;

б) ω*=10 с*$^{-1}$



а)



б)

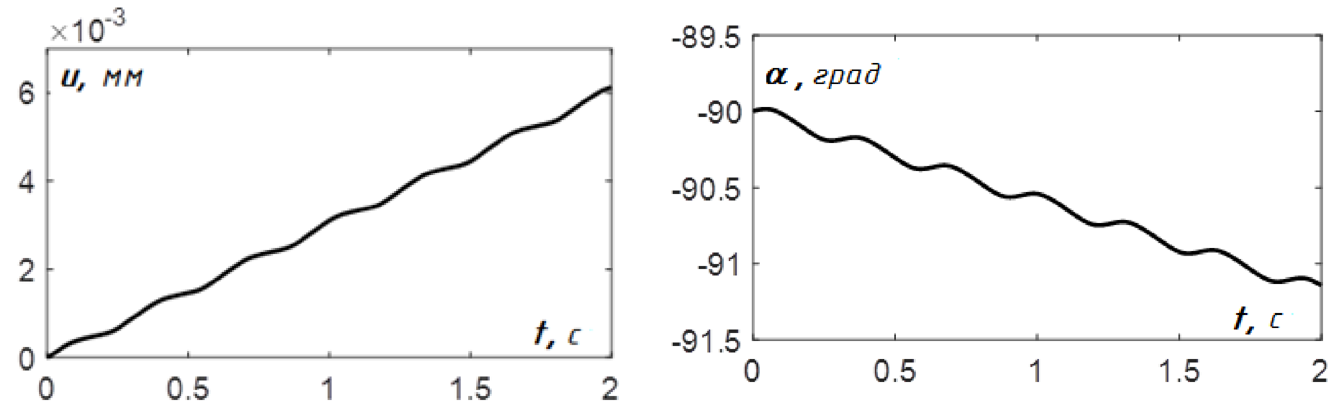
Рис. 3.21. Графіки зміни швидкості $u'=V_z$ в напрямі осі циліндра при ω*=5 с*$^{-1}$ для різних кутів β його нахилу:

а) β=10° – кут нахилу менше кута тертя;

б) β=20° – кут нахилу більше кута тертя

При невеликих кутових швидкостях обертання циліндра (до «залипання» частинки) стабілізація швидкості можлива тільки для кутів нахилу циліндра, менших за кут тертя. На рис. 3.21,б побудовано графік швидкості ковзання частинки в осьовому напрямі при кутові β, більшому за кут тертя. З нього видно, що швидкість ковзання частинки зростає лінійно.

«Залипання» частинки відбувається при досягненні відповідної кутової швидкості обертання циліндра при будь-яких кутах його нахилу. На рис. 3.22 побудовано графіки зміни кута ковзання $\alpha=\alpha(t)$ і відстані $u=u(t)$ пересування частинки в осьовому напрямі при $\omega=20\ c^{-1}$ і кутові нахилу β=45°. Вони демонструють, що частинка за час $t=2\ c$ в осьовому напрямі переміщається на *6 мм* і в кутовому вимірі повертається на 1°. Подальше зростання кутової швидкості обертання циліндра призведе до повного «залипання» частинки.



а) б)

Рис. 3.22. Графіки зміни кінематичних характеристик руху частинки при $\omega=20\ c^{-1}$ і кутові нахилу β=45°:

а) графік зміни відстані $u=u(t)$ пересування частинки в осьовому напрямі;

б) графік зміни кута ковзання $\alpha=\alpha(t)$

Як було з’ясовано, для кутів нахилу циліндра, менших за кут тертя, можлива стабілізація руху, коли частинка ковзає прямолінійно зі сталою швидкістю. Знайдемо розв’язок для цього часткового випадку і для горизонтального циліндра. Розв’язок шукатимемо у вигляді $\alpha=\omega t+\alpha_o$, доповнивши його сталою швидкістю в осьовому напрямі $u'=V_z=const$. Тоді $\alpha'=\omega$, $\alpha''=0$, $u''=0$. Підставивши ці дані у перші два рівняння (3.69), отримаємо систему двох рівнянь:

$$\begin{gathered}0=\frac{g}{r_0}\cos\beta\,\sin(-\alpha_0)-\frac{f\omega g\,\cos\beta\,\cos(-\alpha_0)}{\sqrt{V_z^2+r_0^2\omega^2}};\\ 0=g\,\sin\beta-\frac{fV_z g\,\cos\beta\,\cos(-\alpha_0)}{\sqrt{V_z^2+r_0^2\omega^2}}.\end{gathered}\tag{3.70}$$

Розв'язавши систему (3.70) відносно α_o і V_z, отримаємо:

$$\begin{gathered}\alpha_0=-\mathrm{arctg}\sqrt{f^2\cos^2\beta-\sin\beta};\\ V_z=r_0\omega\sqrt{\frac{1+f^2}{f^2\mathrm{ctg}^2\beta-1}}.\end{gathered}\tag{3.71}$$

Отриманий результат (3.71) трактується наступним чином: якщо частинка попадає на циліндр при α_0 із відносною кутовою швидкістю, рівною кутовій швидкості обертання циліндра, спрямованою в протилежну сторону від напряму його обертання і відносною поступальною швидкістю V_z вздовж осі, то вона і далі продовжує рухатися з цією швидкістю вздовж циліндра без коливань.

3.2.3. Рух частинки по зовнішній поверхні конуса

Теорія руху частинок по поверхнях, які обертаються навколо вертикальної осі, використовується для проєктування пристроїв відцентрової дії [33, 65, 70, 183, 224, 241]. Зокрема, це стосується апаратів відцентрового типу, що використовуються для розсіювання мінеральних добрив [63, 68, 201, 203, 208, 210, 211, 213, 222, 253, 311], вилучення соку із подрібнених овочів [102] і фруктів, очищення повітря від частинок пилу тощо.

Принцип роботи таких апаратів полягає в тому, що частинка ковзає по робочій поверхні, яка обертається навколо вертикальної осі, під дією відцентрової сили розганяється і рухається до периферії від осі обертання. При цьому частинка здійснює складний рух, який є сумою двох рухів: переносного руху поверхні і відносного руху частинки по поверхні (її ковзання).

Розглянемо конічну форму висівного апарату при русі частинки по його зовнішній поверхні. Такий випадок має місце у висівних апаратах, у яких насіння потрапляє на конус, який обертається [204, 219, 242, 253].

Параметричні рівняння конуса з вершиною в початку координат і прямолінійними твірними, спрямованими від вершини, запишуться:

$$\begin{aligned} X &= u\cos\beta\cos\alpha;\\ Y &= u\cos\beta\sin\alpha;\\ Z &= -u\sin\beta, \end{aligned} \tag{3.72}$$

де β=const – кут нахилу прямолінійних твірних конуса до горизонтальної площини, град;

u та α – незалежні змінні поверхні: u – довжина прямолінійної твірної, яка бере відлік від початку координат (вершини конуса), α – кут повороту точки поверхні навколо осі конуса.

При встановленні залежності між змінними u і α на поверхні конуса буде описана лінія. Задамо таку залежність за допомогою параметра t – часу ковзання частинки по зовнішній поверхні конуса. Тоді внутрішнє рівняння відносної траєкторії частинки описується залежностями: $u=u(t)$, $\alpha=\alpha(t)$.

При обертанні навколо осі OZ з кутовою швидкістю ω всі точки конуса (3.72) повертаються на кут $\theta=\omega t$ при незмінній координаті z. Параметричні рівняння конуса, що описують його положення після повороту на кут θ, мають вигляд:

$$X = u\cos\beta\cos\alpha\cos\theta - u\cos\beta\sin\alpha\sin\theta\,;$$
$$Y = u\cos\beta\cos\alpha\sin\theta + u\cos\beta\sin\alpha\cos\theta\,; \qquad (3.73)$$
$$Z = -u\sin\beta.$$

Після спрощень з урахуванням $\theta = \omega t$ рівняння (3.73) набувають вигляду:

$$X = u\cos\beta\cos(\alpha + \omega t);$$
$$Y = u\cos\beta\sin(\alpha + \omega t); \qquad (3.74)$$
$$Z = -u\sin\beta.$$

При обертанні конуса з кутовою швидкістю ω по його зовнішній поверхні буде ковзати частинка, відносна траєкторія руху якої описується внутрішніми залежностями $u=u(t)$, $\alpha=\alpha(t)$. Якщо ці залежності відомі, то після підстановки у (3.72) вони опишуть відносну траєкторію ковзання частинки по поверхні конуса по відношенню до системи координат, яка обертається разом з конусом, а у (3.74) – абсолютну траєкторію руху частинки по відношенню до нерухомої системи координат. У разі «залипання» частинки відносна траєкторія відсутня (нею є точка), а абсолютною траєкторією буде коло. І в першому, і в другому випадку рівняння (3.72) і (3.74) описують вже не поверхню, а лінію на ній. Тому в цих рівняннях відповідно до прийнятих раніше позначень будемо використовувати не великі літери *«X», «Y», «Z»*, а малі *«x», «y», «z»*. З урахуванням залежностей $u=u(t)$, $\alpha=\alpha(t)$ продиференціюємо рівняння (3.74) за часом t.

Перші похідні (3.74) (складові проекції абсолютної швидкості частинки) мають вигляд:

$$x' = [u'\cos(\alpha + \omega t) - u(\alpha' + \omega)\sin(\alpha + \omega t)]\cos\beta;$$
$$y' = [u'\sin(\alpha + \omega t) + u(\alpha' + \omega)\cos(\alpha + \omega t)]\cos\beta; \qquad (3.75)$$
$$z' = -u'\sin\beta.$$

Другі похідні (3.74) (складові проекції абсолютного прискорення частинки) координат відповідно запишуться:

$$\begin{gathered} x'' = -\big[\big(\alpha''u + 2u'(\alpha' + \omega)\big)\sin(\alpha + \omega t) \\ + (-u'' + u(\alpha' + \omega)^2)\cos(\alpha + \omega t)\big]\cos\beta; \\ y'' = \big[\big(\alpha''u + 2u'(\alpha' + \omega)\big)\cos(\alpha + \omega t) \\ - (-u'' + u(\alpha' + \omega)^2)\sin(\alpha + \omega t)\big]\cos\beta; \\ z'' = -u''\sin\beta. \end{gathered} \tag{3.76}$$

Розглянемо прикладені до частинки сили. На рис. 3.32 прикладені сили позначені, як mg, R і fR.

Першою прикладеною силою є вага частинки mg. Оскільки вектор ваги спрямований вниз (див. рис. 3.23,а), проекції направляючого одиничного вектора на осі координат запишуться:

$$[0; \quad 0; \quad -1]. \tag{3.77}$$

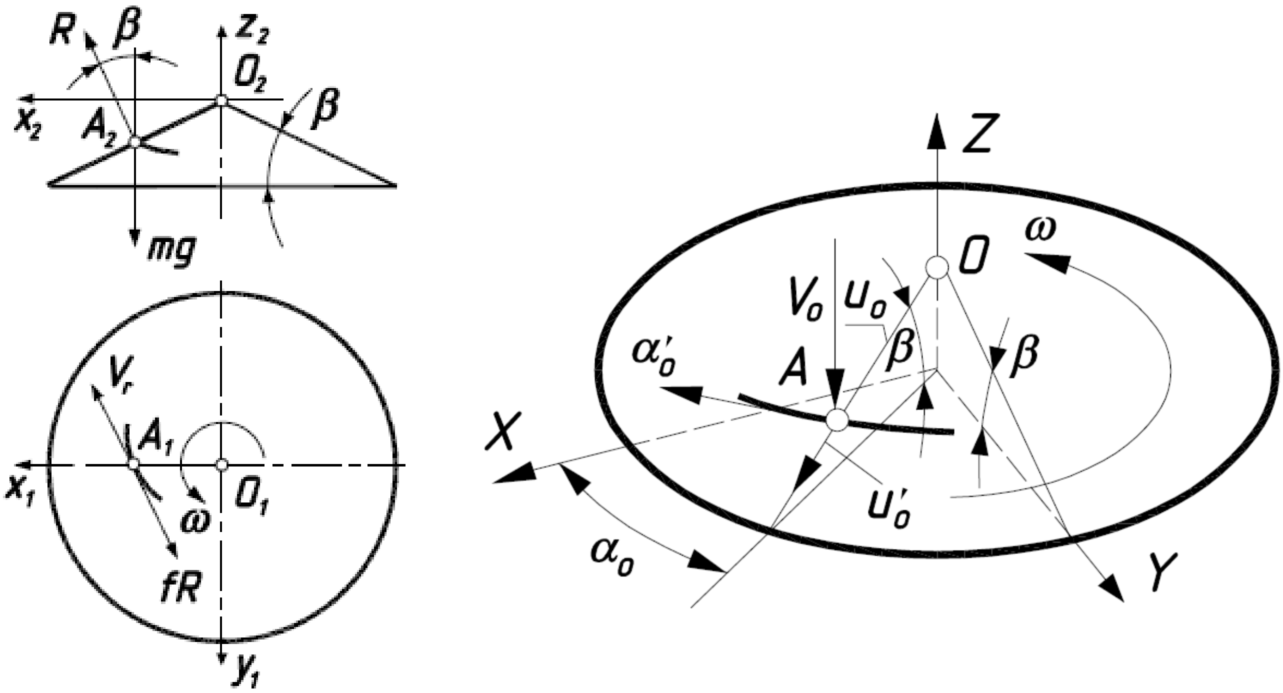
Друга прикладена сила – реакція R поверхні конуса (див. рис. 3.23,а), яка спрямована по нормалі $\overline{N}$. Напрямок нормалі до поверхні визначається з векторного добутку векторів, що проходять через точку A поверхні (див. рис. 3.23) і дотичних до координатних ліній поверхні. Ці вектори є частковими похідними рівнянь (3.72):

$$\begin{gathered} X_\alpha = -u\cos\beta\sin\alpha; \quad Y_\alpha = u\cos\beta\cos\alpha; \quad Z_\alpha = 0; \\ X_u = \cos\beta\cos\alpha; \quad Y_u = \cos\beta\sin\alpha; \quad Z_u = -\sin\beta. \end{gathered} \tag{3.78}$$

Після приведення векторного добутку векторів (3.78) до одиничного, проекції вектора $\overline{N}$ запишуться:

$$[\sin\beta\cos\alpha; \quad \sin\beta\sin\alpha; \quad \cos\beta]. \tag{3.79}$$

Сила тертя *fR* спрямована в бік, протилежний відносній швидкості V_r руху частинки (див. рис. 3.23,а).



а) б)

Рис. 3.23. Графічні ілюстрації до опису положення частинки на поверхні та прикладені до неї сили:

а) проекції конуса з прикладеними до частинки силами;

б) до визначення початкового положення і швидкості частинки в точці А

Швидкість V_r є швидкістю ковзання частинки по поверхні без урахування обертання останньої. Тому для знаходження її проекцій необхідно продиференціювати рівняння (3.72) з урахуванням того, що $u=u(t)$ и $\alpha=\alpha(t)$:

$$\begin{aligned} x' &= \cos\beta(u'\cos\alpha - \alpha' u \sin\alpha); \\ y' &= \cos\beta(u'\sin\alpha + \alpha' u \cos\alpha); \\ z' &= -u'\sin\beta. \end{aligned} \tag{3.80}$$

Величина швидкості V_r запишеться:

$$V_r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{u^2\alpha'^2\cos^2\beta + u'^2}. \tag{3.81}$$

Проекції одиничного вектора, уздовж якого спрямована швидкість частинки, визначаються діленням складових швидкості (3.80) на її модуль (3.81):

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\cos\beta(u'\cos\alpha - \alpha' u \sin\alpha)}{\sqrt{u^2\alpha'^2 cos^2\beta + u'^2}}; \\ \dfrac{\cos\beta(u'\sin\alpha + \alpha' u \cos\alpha)}{\sqrt{u^2\alpha'^2 \cos^2\beta + u'^2}}; \\ \dfrac{u'\sin\beta}{\sqrt{u^2\alpha'^2\cos^2\beta + u'^2}}. \end{bmatrix} \tag{3.82}$$

Напрямок прикладених до частинки сил задають одиничні вектори (3.77), (3.79) і (3.82). Оскільки конус обертається і проєктування сил здійснюється на нерухому систему координат, то два останніх вектора теж треба повернути на кут θ=ωt. Після цього одиничний вектор, що задає напрямок дії реакції R поверхні, запишеться в проекціях на осі нерухомої системи координат:

$$[\sin\beta\cos(\alpha + \omega t); \quad \sin\beta\sin(\alpha + \omega t); \quad \cos\beta]. \tag{3.83}$$

Проекції одиничного вектора відносної швидкості теж отримаємо поворотом вектора (3.82) на кут θ=ωt:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\cos\beta(u'\cos(\alpha + \omega t) - \alpha' u\sin(\alpha + \omega t))}{\sqrt{u^2\alpha'^2\cos^2\beta + u'^2}}; \\ \dfrac{\cos\beta(u'\sin(\alpha + \omega t) + \alpha' u \cos(\alpha + \omega t))}{\sqrt{u^2\alpha'^2\cos^2\beta + u'^2}}; \\ -\dfrac{u'\sin\beta}{\sqrt{u^2\alpha'^2\cos^2\beta + u'^2}}. \end{bmatrix} \tag{3.84}$$

Складаємо систему диференціальних рівнянь відносного руху частинки по конусу, що обертається, з урахуванням прикладених сил і знайдених одиничних векторів їх дії (3.77), (3.83) і (3.84). Також враховуємо, що сила тертя *fR* спрямована у протилежний бік вектору (3.84):

$$\begin{gathered}
mx'' = R\sin\beta\cos(\alpha+\omega t)\\
-fR\frac{\cos\beta\big(u'\cos(\alpha+\omega t)-\alpha' u\sin(\alpha+\omega t)\big)}{\sqrt{u^2\alpha'^2\cos^2\beta+u'^2}};\\
my'' = R\sin\beta\sin(\alpha+\omega t)\\
-fR\frac{\cos\beta\big(u'\sin(\alpha+\omega t)+\alpha' u\cos(\alpha+\omega t)\big)}{\sqrt{u^2\alpha'^2\cos^2\beta+u'^2}};\\
mz'' = -mg + R\cos\beta + fR\frac{u'\sin\beta}{\sqrt{u^2\alpha'^2\cos^2\beta+u'^2}}.
\end{gathered} \tag{3.85}$$

Розв'язавши систему (3.85) відносно других похідних невідомих функцій *u=u(t)* та *α=α(t)*, а також *R=R(t)*, отримаємо:

$$\alpha'' = -2\frac{u'}{u}(\alpha'+\omega) - \frac{f\alpha'\cos\beta[g-u(\alpha'+\omega)^2\sin\beta]}{\sqrt{u^2\alpha'^2\cos^2\beta+u'^2}}; \tag{3.86}$$

$$u'' = u(\alpha'+\omega)^2\cos^2\beta + g\sin\beta - \frac{fu'\cos\beta[g-u(\alpha'+\omega)^2\sin\beta]}{\sqrt{u^2\alpha'^2\cos^2\beta+u'^2}};$$

$$R = m\cos\beta[g-u(\alpha'+\omega)^2\sin\beta].$$

Перших два диференціальних рівняння (3.86) складають систему диференціальних рівнянь відносно двох невідомих функцій: *u=u(t)* і *α=α(t)*. Реакція поверхні *R=R(t)* стає відомою після їх знаходження. Систему потрібно розв'язувати чисельними методами, проте вона має частковий розв'язок. Він стосується нерухомого конуса для випадку, коли частинка рухається прямолінійно вздовж його твірної. У такому випадку $\alpha''=\alpha'=0$ і $\omega=0$. Перше рівняння (3.86) перетворюється на тотожність, а друге набуває наступного вигляду:

$$u'' = g(\sin\beta - f\cos\beta). \tag{3.87}$$

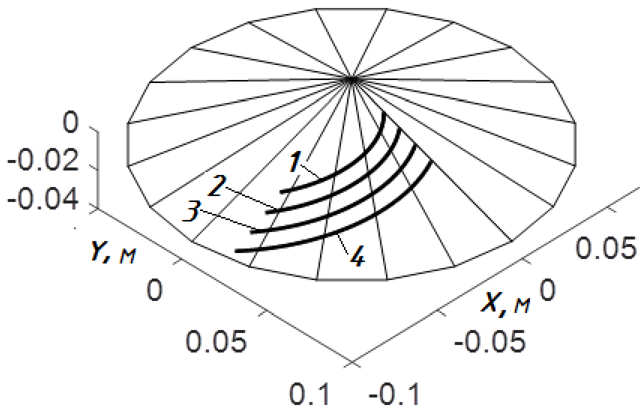
Отримане рівняння є відомим диференціальним рівнянням прямолінійного руху частинки по лінії найбільшого нахилу похилої площини. Такими лініями для конуса є його прямолінійні твірні. У випадку, коли $\beta=arctg\ f$, тобто твірні конуса нахилені під кутом тертя, прискорення є нульовим ($u''=0$). У такому випадку частинка може бути нерухомою або рухатися вздовж твірної конуса з постійною заданою швидкістю.

При чисельному розв'язанні системи диференціальних рівнянь враховувалося падіння частинки на конус з певної висоти. У момент зустрічі з поверхнею конуса частинка має початкову швидкість V_0 (див. рис. 3.23,б), спрямовану вниз. Отже, після зустрічі з поверхнею вона набуває складової $V_0{\cdot}\sin\beta$, спрямованої вздовж твірної.

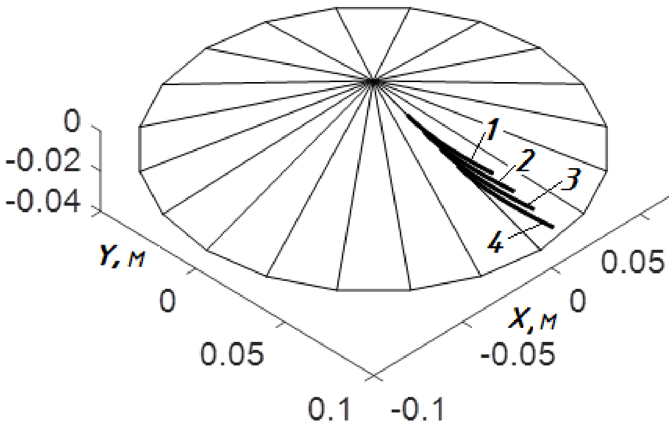
Відповідно до цього при інтегруванні системи (3.86) необхідно задати початкові умови. Однією з цих умов є $u'_o=V_0{\cdot}\sin\beta$, оскільки перша похідна залежності $u=u(t)$ є складовою швидкості руху вздовж твірної конуса. Друга складова залежить від кутової швидкості ковзання α' частинки. У момент зустрічі з поверхнею вона має максимальне значення, що дорівнює кутовій швидкості ω обертання конуса, і спрямована у протилежний бік ($\alpha'_o=-\omega$). Положення частинки на поверхні конуса задається початковими значеннями координат u_o і α_o (див. рис. 3.23,а).

В конусних сепараторах, які використовуються для сепарації частинок за розміром у гірничодобувній та переробній промисловостях (наприклад, гідроциклон Krebs gMAX), кут нахилу твірних конуса становить приблизно $20°$, кутова швидкість знаходиться в діапазоні *52,36–157,08 рад/с*. З огляду на це для розрахунків приймаємо: кут нахилу твірних конуса $\beta=20°$, швидкість його обертання $\omega=15\ c^{-1}$.

На рис. 3.24 за результатами розрахунків побудовано траєкторії ковзання частинки по поверхні конуса протягом $t=0,1$ *с* з моменту зустрічі. Коефіцієнт тертя становить $f=0,3$, початкова швидкість частинки $V_0=1$ *м/с*. На рис. 3.25 побудовано відносні і абсолютні траєкторії частинки, яка падає з різною початковою швидкістю V_0 в момент зіткнення з поверхнею конуса. Відстань від вершини становить u_o=0,03 *м,* час спостереження *t=0,15 с*.



а)



б)

Рис. 3.24. Відносні і абсолютні траєкторії руху частинки при попаданні її з початковою швидкістю V_0=*1 м/с* на поверхню конуса з різною відстанню від його вершини (*1 –* u_o*=0,02 м, 2 –* u_o*=0,03 м, 3 –* u_o*=0,04 м, 4 –* u_o*=0,05 м*):

а) відносні траєкторії ковзання;

б) абсолютні траєкторії руху

Якщо кут нахилу твірних конуса більше кута тертя ($\beta>$arctg f), то частинка почне ковзання по конусу, навіть якщо він не обертається. При куті нахилу твірних конуса, що менше кута тертя $\beta<$arctg f, частинка почне ковзання при достатній величині кутової швидкості ω обертання конуса. Це значення кутової швидкості може бути знайдено аналітично.

Для початку ковзання необхідно, щоб рушійна сила F_d перевищувала силу тертя F_f. Силу ваги mg необхідно спроєктувати на твірну конуса, уздовж якої частинка може почати рух: $m\cdot g\cdot\sin\beta$ (див. рис. 3.26). Другою складовою рушійної сили є складова відцентрової сили F_c: $F_c\cdot\cos\beta$. Таким чином $F_d=m\cdot g\cdot\sin\beta+F_c\cdot\cos\beta$. Якщо ці ж сили спроєктувати на нормаль N до поверхні (див. рис. 3.26), то отримаємо силу тиску частинки на поверхню. Реакція R поверхні направлена у протилежний бік: $R=m\cdot g\cdot\cos\beta-F_c\cdot\sin\beta$. Сила тертя становить $F_f=f\cdot R$, тобто $F_f=f\cdot(m\cdot g\cdot\cos\beta-F_c\cdot\sin\beta)$. Відцентрову силу F_c знаходимо за формулою: $F_c=m \cdot r \cdot \omega^2$ або $F_c=m \cdot u_o \cdot \omega^2 \cdot \cos\ \beta$. Після цього нерівність $F_d>F_f$ має наступний вигляд:

$$m(g \sin\beta + u_o\omega^2 \cos^2\beta) > mf(g\cos\beta - u_o\omega^2 \sin\beta\cos\beta). \qquad (3.88)$$

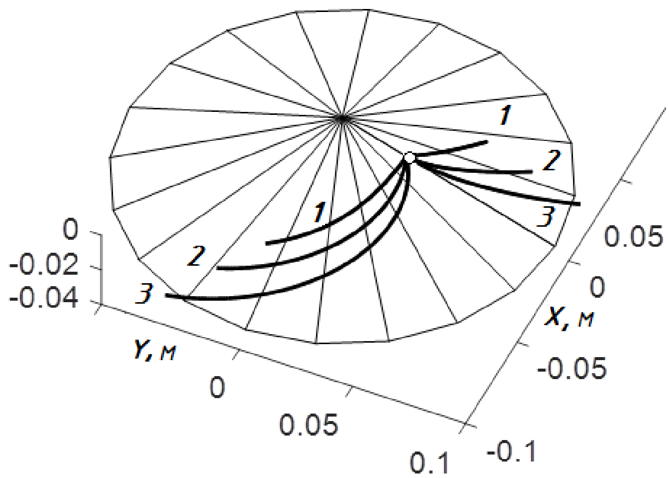


Рис. 3.25. Відносні (зліва) і абсолютні (справа) траєкторії руху частинки, яка потрапляє на поверхню конуса з різним значенням початкової швидкості (*1 – V_0=0 м/с, 2 – V_0=0,5 м/с, 3 – V_0=1 м/с*)

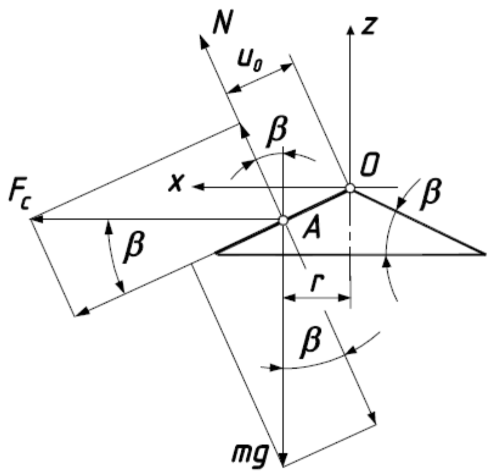
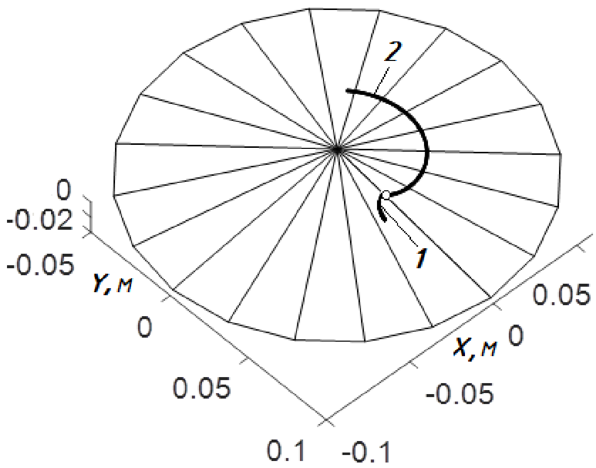


Рис. 3.26. Схема дії прикладених до частинки сил в точці А

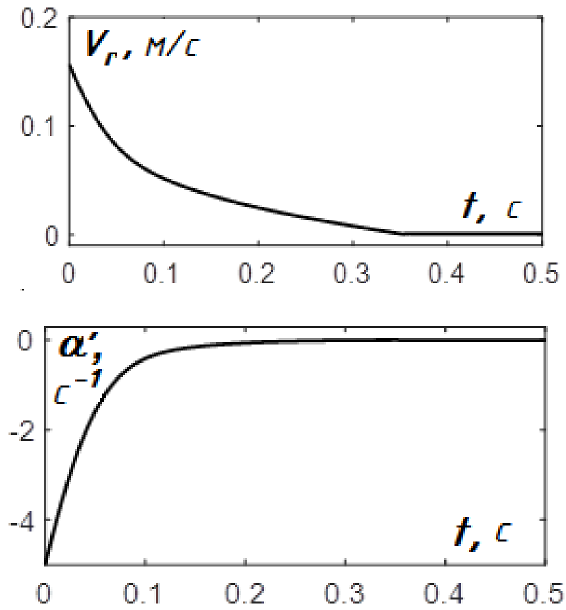
Розв’язавши нерівність (3.88) відносно ω, отримаємо:

$$\omega > \sqrt{\frac{g(f - \mathrm{tg}\beta)}{u_o(\cos\beta + f\ \sin\beta)}}. \qquad (3.89)$$

Якщо кут нахилу твірних конуса дорівнює куту тертя ($\beta=arctg\ f$), то ковзання частинки починається при будь-якій кутовій швидкості обертання конуса. Для прийнятого нами коефіцієнта тертя $f=0,3$ кут тертя дорівнює $16,7°$. Знайдемо граничне значення кутової швидкості обертання конуса для кута нахилу твірних β=10°. Нехай $u_o=0,03$ *м*, тоді відповідно до (3.89) ω>6,25 c^{-1}. Якщо кутова швидкість обертання конуса менше отриманого значення, то частинка зі стану спокою ковзання не почне. Розглянемо її поведінку, коли вона падає з певної висоти і в момент попадання на поверхню має швидкість V_0=0,3 *м/с*. На рис. 3.27,а побудовані відносна і абсолютна траєкторії руху частинки при ω=5 $с^{-1}$. Із графіків відносної і кутової швидкості ковзання частинки (див. рис. 3.27,б) видно, що вона зупиняється через *0,35 с*. Після цього вона у відносному русі стає нерухомою, а в абсолютному – рухається по колу.



а)



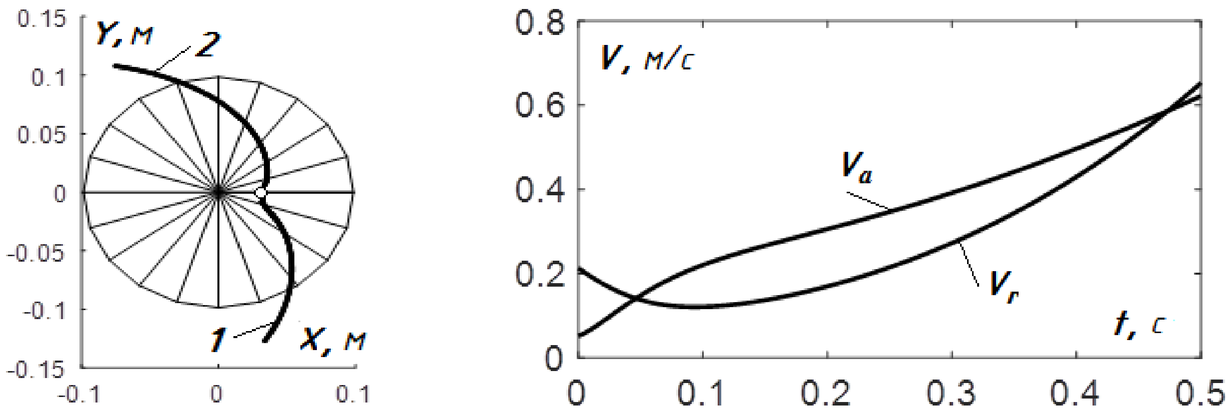
б)

Рис. 3.27. Графічні ілюстрації руху частинки при попаданні її на поверхню конуса з початковою швидкістю $V_0=0,3$ *м/с* на відстані $u_o=0,03$ *м* від його вершини (ω=5 $с^{-1}$, $\beta=10°$, $f=0,3$, $t=0,5$ *с*):

а) абсолютна – 1 і відносна – 2 траєкторії руху;

б) графіки відносної (вгорі) і кутової (внизу) швидкостей ковзання частинки

Розглянемо рух частинки при прийнятих параметрах, збільшивши кутову швидкість обертання конуса так, щоб вона була більше граничної (ω = 7 $с^{-1}$). Графічні ілюстрації для цього випадку представлені на рис. 3.28. У цьому випадку частинка розганяється. Абсолютна швидкість отримана геометричним підсумовуванням її складових (3.75).



а) б)

Рис. 3.28. Графічні ілюстрації руху частинки при ω=7 c^{-1} (більше граничного значення, визначеного за (3.89)):

а) абсолютна – 1 і відносна – 2 траєкторії (вид зверху);

б) графік зміни відносної V_r і абсолютної V_a швидкостей

Отримана формула (3.89) для знаходження граничного значення кутової швидкості, яка залежить від кута нахилу твірних, коефіцієнта тертя і відстані від вершини конуса до частинки, є дійсною і для плоского диска, тобто для випадку, коли кут нахилу твірних дорівнює нулю.

3.2.4. Рух частинки по внутрішній поверхні сферичного сегмента

Досліджуючи пристрої відцентрової дії, доцільно розглянути висівні апарати сферичної форми [54, 72]. Знайдемо закономірності руху частинки по сферичному сегменту, який обертається навколо вертикальної осі зі сталою кутовою швидкістю.

Параметричні рівняння сфери з початком координат в її нижньому полюсі мають вигляд:

$$X = r_0 \sin\varepsilon \cos\alpha;$$
$$Y = r_0 \sin\varepsilon \sin\alpha; \qquad (3.90)$$
$$Z = r_0 (1 - \cos\varepsilon),$$

де r_0 – радіус сфери, м;

ε=0…εₒ, α=0…2π – незалежні змінні поверхні, якими є кути, що задають положення точки на ній в напрямі меридіана і паралелі відповідно.

Від значення кута ε_o залежить висота сферичного сегмента: при $\varepsilon_0 = \frac{\pi}{2}$ сегмент дорвнюватиме половині сфери.

Обертання сегмента розглядалося по відношенню до двох систем координат: нерухомої *OXYZ* і рухомої *Oxyz*. Рухома система координат жорстко прив’язана до поверхні і обертається разом із нею. Якщо сферичний сегмент (3.90) буде обертатися навколо вертикальної осі з кутовою швидкістю ω, то за час t поверхня повернеться на кут $\theta=\omega\cdot t$:

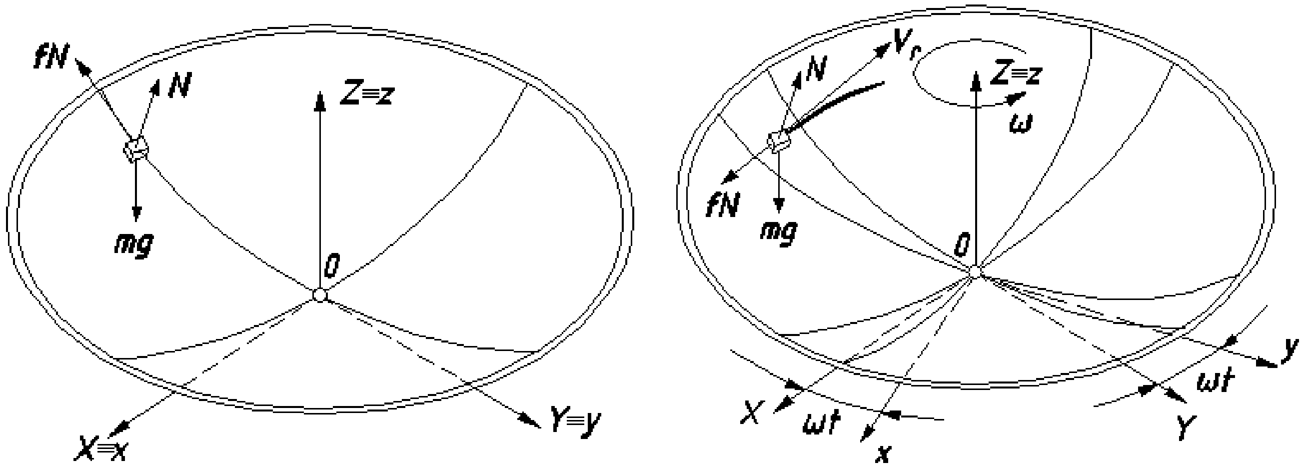
$$\begin{aligned} X &= r_0 \sin\varepsilon \cos\alpha \cos\theta - r_0 \sin\varepsilon \sin\alpha \sin\theta; \\ Y &= r_0 \sin\varepsilon \cos\alpha \sin\theta + r_0 \sin\varepsilon \sin\alpha \cos\theta; \\ Z &= r_0(1 - \cos\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.91}$$

Після спрощень із урахуванням $\theta=\omega t$ рівняння (3.91) набувають вигляду:

$$\begin{aligned} X &= r_0 \sin\varepsilon \cos(\alpha + \omega t); \\ Y &= r_0 \sin\varepsilon \sin(\alpha + \omega t); \\ Z &= r_0(1 - \cos\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.92}$$

Нехай в початковий момент ($t=0$) дві системи координат збігаються, сферичний сегмент не обертається і частинка знаходиться на меридіані в площині *OYZ* (див. рис. 3.29,а).

До неї прикладені розглянуті раніше сили: сила ваги mg, реакція R поверхні та сила тертя $f\cdot R$, яка не дозволяє частинці рухатися вниз вздовж меридіана в напрямку початку координат. При обертанні диска зі сталою кутовою швидкістю ω за час t він повернеться на кут $\theta=\omega t$ (див. рис. 3.29,б). Якби частинка не ковзала по диску, то вона повернулася б разом з диском на кут θ і зайняла б положення на тому ж самому меридіані після його повороту. У результаті ковзання частинка займе проміжне положення (див. рис. 3.29,а). При цьому ковзання частинки відбувається в протилежну сторону обертання диска. Напрям відносної швидкості V_r спрямований по дотичній до траєкторії ковзання частинки (див. рис. 3.29,б).



а) б)

Рис. 3.29. Розташування частинки на сферичному сегменті та схема прикладених до неї сил:

а) нерухома і рухома системи координат збігаються, сегмент не обертається;

б) сегмент обертається, частинка ковзає по його поверхні

Рівняння руху частинки складемо у вигляді (2.3). Усі вектори будемо визначати в проекціях на осі нерухомої системи координат. Траєкторія відносного руху частинки по відношенню до рухомої системи координат *Oxyz* буде описана залежністю між криволінійними координатами сфери ε і α. Така залежність може бути задана по різному: $\varepsilon=\varepsilon(\alpha)$, $\alpha=\alpha(\varepsilon)$ або ж через спільну змінну t: $\varepsilon=\varepsilon(t)$, $\alpha=\alpha(t)$. Для нашого випадку роль спільної змінної відіграє час t.

Таким чином, при прийнятому взаємозв’язку $\varepsilon=\varepsilon(t)$ і $\alpha=\alpha(t)$ рівняння (3.90) задають відносну траєкторію руху частинки, а рівняння (3.92) – абсолютну. Вказані залежності є шуканими.

Проекції відносної швидкості ковзання частинки по поверхні сферичного диска є результатом диференціювання (3.90):

$$x_r' = r_0\varepsilon'\cos\varepsilon\,\cos\alpha - r_0\alpha'\sin\varepsilon\,\sin\alpha;$$
$$y_r' = r_0\varepsilon'\cos\varepsilon\,\sin\alpha + r_0\alpha'\sin\varepsilon\,\cos\alpha; \qquad (3.93)$$
$$z_r' = r_0\varepsilon'\sin\varepsilon.$$

Величина швидкості ковзання частинки по сферичному диску у відносному русі має вигляд:

$$V_r = \sqrt{x_r'^2 + y_r'^2 + z_r'^2} = r_0\sqrt{\varepsilon'^2 + \alpha'^2\sin^2\varepsilon}. \qquad (3.94)$$

Одиничний вектор T дотичної до траєкторії відносного руху в проекціях на осі системи $OXYZ$ запишеться:

$$T_x = \frac{\varepsilon'\cos\varepsilon\,\cos\alpha - \alpha'\sin\varepsilon\,\sin\alpha}{\sqrt{\varepsilon'^2 + \alpha'^2\sin^2\varepsilon}};$$
$$T_y = \frac{\varepsilon'\cos\varepsilon\,\sin\alpha + \alpha'\sin\varepsilon\,\cos\alpha}{\sqrt{\varepsilon'^2 + \alpha'^2\sin^2\varepsilon}}; \qquad (3.95)$$
$$T_z = \frac{\varepsilon'\sin\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon'^2 + \alpha'^2\sin^2\varepsilon}}.$$

Реакція R поверхні (3.90) спрямована по нормалі $\bar{N}$ до неї і визначається із векторного добутку векторів, дотичних до координатних ліній поверхні. Проекціями цих векторів є частинні похідні рівнянь (3.90):

$$X_\varepsilon = r_0\cos\varepsilon\,\cos\alpha; \quad Y_\varepsilon = r_0\cos\varepsilon\,\sin\alpha; \quad Z_\varepsilon = r_0\sin\varepsilon;$$
$$X_\alpha = -r_0\sin\varepsilon\,\sin\alpha; \quad Y_\alpha = r_0\sin\varepsilon\,\cos\alpha; \quad Z_\alpha = 0. \qquad (3.96)$$

Після векторного множення векторів (3.96) і приведення отриманого вектора до одиничного проекції вектора нормалі $\bar{N}$ до поверхні запишуться:

$$N_x = -\sin\varepsilon\,\cos\alpha;$$
$$N_y = -\sin\varepsilon\,\sin\alpha; \qquad (3.97)$$
$$N_z = \cos\varepsilon.$$

Абсолютну швидкість руху частинки по відношенню до нерухомої системи координат знаходимо диференціюванням рівнянь (3.92):

$$x'_a = r_0\varepsilon'\cos\varepsilon\,\cos(\alpha+\omega t) - r_0(\alpha'+\omega)\sin\varepsilon\,\sin(\alpha+\omega t);$$
$$y'_a = r_0\varepsilon'\cos\varepsilon\,\sin(\alpha+\omega t) + r_0(\alpha'+\omega)\sin\varepsilon\,\cos(\alpha+\omega t); \qquad (3.98)$$
$$z'_a = r_0\varepsilon'\sin\varepsilon.$$

Проекції вектора абсолютного прискорення на осі нерухомої системи координат знаходимо диференціюванням виразів (3.98):

$$x''_a = r_0[\varepsilon''\cos\varepsilon - \varepsilon'^2\sin\varepsilon - (\alpha'+\omega)^2\sin\varepsilon]\cos(\alpha+\omega t) -$$
$$-r_0[\alpha''\sin\varepsilon + 2\varepsilon'(\alpha'+\omega)\cos\varepsilon]\sin(\alpha+\omega t);$$
$$y''_a = r_0[\varepsilon''\cos\varepsilon - \varepsilon'^2\sin\varepsilon - (\alpha'+\omega)^2\sin\varepsilon]\sin(\alpha+\omega t) + \qquad (3.99)$$
$$+r_0[\alpha''\sin\varepsilon + 2\varepsilon'(\alpha'+\omega)\cos\varepsilon]\cos(\alpha+\omega t);$$
$$z''_a = r_0\varepsilon''\sin\varepsilon + r_0\varepsilon'^2\cos\varepsilon.$$

Одиничні вектори T (3.95) напряму відносної швидкості V_r і (3.97) нормалі $\overline{N}$ до поверхні знайдені для нерухомої поверхні. Оскільки поверхня повертається на кут $\theta=\omega\cdot t$, то вказані вектори теж потрібно повернути на цей кут, щоб вони відповідали розташуванню частинки. Після повороту проекції вказаних векторів запишуться:

– одиничного вектора дотичної до відносної траєкторії:

$$T_X = \frac{\varepsilon'\cos\varepsilon\,\cos(\alpha+\omega t) - \alpha'\sin\varepsilon\,\sin(\alpha+\omega t)}{\sqrt{\varepsilon'^2 + \alpha'^2\sin^2\varepsilon}}; \qquad (3.100)$$

$$T_Y = \frac{\varepsilon'\cos\varepsilon\,\sin(\alpha+\omega t) + \alpha'\sin\varepsilon\,\cos(\alpha+\omega t)}{\sqrt{\varepsilon'^2 + \alpha'^2\sin^2\varepsilon}};$$

$$T_Z = \frac{\varepsilon'\sin\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon'^2 + \alpha'^2\sin^2\varepsilon}}.$$

– одиничного вектора нормалі до поверхні:

$$N_X = -\sin\varepsilon\cos(\alpha+\omega t);$$
$$N_Y = -\sin\varepsilon\sin(\alpha+\omega t); \qquad (3.101)$$
$$N_Z = \cos\varepsilon.$$

Векторне рівняння (2.3) в проекціях на осі нерухомої системи координат *OXYZ* має вигляд:

$$mx_a'' = RN_x - fRT_x;$$
$$my_a'' = RN_y - fRT_y; \qquad (3.102)$$
$$mz_a'' = RN_z - fRT_z - mg.$$

Систему трьох рівнянь із трьома невідомими залежностями: $\alpha=\alpha(t)$, $\varepsilon=\varepsilon(t)$ і $R=R(t)$ отримаємо підстановкою (3.100), (3.101) та (3.99) у (3.102). Розв’язуємо її відносно α'', ε'', R:

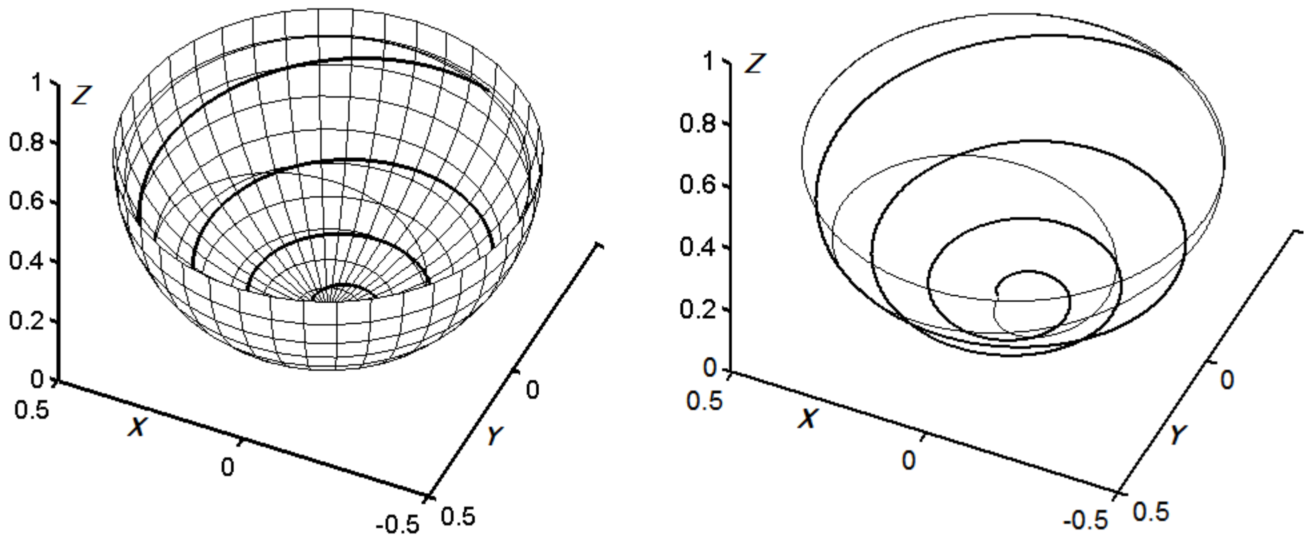
$$\varepsilon'' = \left[(\omega+\alpha')^2\cos\varepsilon - \frac{g}{r_0}\right]\sin\varepsilon - f\frac{\varepsilon' B}{r_0 A};$$
$$\alpha'' = -2\varepsilon'(\omega+\alpha')\mathrm{ctg}\varepsilon - f\frac{\alpha' B}{r_0 A}; \qquad (3.103)$$
$$R = mB,$$

де $A = \sqrt{\varepsilon'^2 + \alpha'^2\sin^2\varepsilon}$,

$B = g\cos\varepsilon + r_0[\varepsilon'^2 + (\omega+\alpha')^2\sin^2\varepsilon]$.

Система (3.103) є системою двох перших рівнянь відносно невідомих залежностей *α=α(t)* і *ε=ε(t)*, а залежність *R=R(t)* знаходиться після розв'язання цієї системи. Знайдені залежності *α=α(t)* і *ε=ε(t)* потрібно підставити у рівняння (3.90) для того, щоб одержати відносну траєкторію руху частинки по сферичному диску, тобто траєкторію ковзання, і у рівняння (3.92), щоб одержати абсолютну траєкторію руху.

На рис. 3.30 побудовано відносну і абсолютну траєкторії руху частинки по диску протягом *2 с* при наступних параметрах: $r_0=0{,}5$ *м*, $\omega=20$ $с^{-1}$, $f=0{,}3$.



а) б)

Рис. 3.30. Відносна (потовщена лінія) і абсолютна траєкторії руху частинки:
а) на поверхні сферичного сегмента;
б) поверхня сегмента умовно не показана

Аналізуючи траєкторії, можна зробити висновок, що частинка ковзає по сфері, піднімаючись до певного положення, потім «залипає» і обертається разом із поверхнею. Це підтверджується графіками відносної і абсолютної швидкостей частинки, наведеними на рис. 3.31. При цьому абсолютна швидкість частинки V_a визначається, як геометрична сума її проекцій (3.98) за формулою (3.94). Із графіка на рис. 3.31 видно, що через 1,6 *с* після початку руху частинка «залипає», тобто швидкість її ковзання стає рівною нулю, а абсолютна швидкість стає рівною V_a=10 *м/с*.

Із графіка зміни кута ε (див. рис. 3.32) видно, що в момент «залипання» частинки при t=1,6 c він досягає максимального значення ε=85°, тобто частинка разом із сегментом обертається по колу, яке практично дорівнює екватору сфери, тобто радіусу сфери r_0. Виходячи із заданих значень $r_0=0{,}5$ *м* і $\omega=20$ c^{-1}, знаходимо: $V_a=\omega\cdot r_0=10$ *м/с* – отримане значення швидкості узгоджується з графіком.

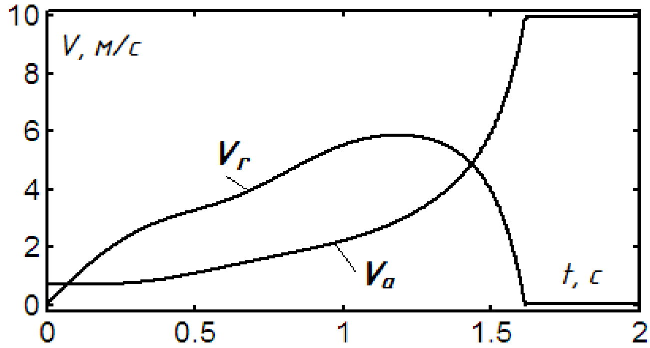


Рис. 3.31. Графіки відносної V_r і абсолютної V_a швидкостей руху частинки

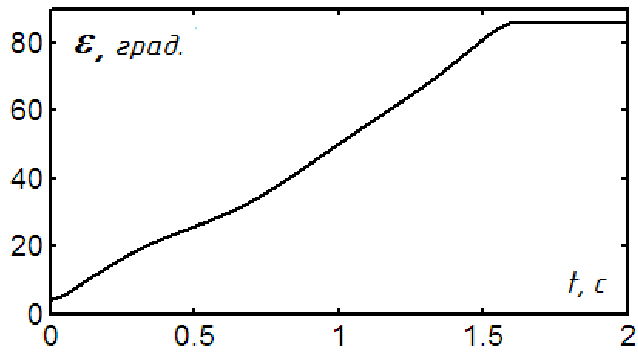


Рис. 3.32. Графік зміни кута ε

Якщо частинка починає свій рух не з нижнього полюса сферичного сегмента, а дещо вище (наприклад, при ε_o=45°, див. рис. 3.33), то вона швидше досягає верхньої граничної траєкторії, виходячи за межі півсфери. Для цього їй потрібно 0,2 *с* (див. рис. 3.34). На рис. 3.35 показаний графік зміни реакції поверхні для частинки масою m=0,01 *кг*.

Слід підкреслити, що рух частинки по внутрішній стінці поверхні, що обертається, має місце в пристроях для витискання соку із перетертих плодів або овочів. Зазвичай у конструкції таких пристроїв використовується зрізаний конус з отворами в ньому для виходу соку. Рух частинки матеріалу по внутрішній поверхні конуса відрізняється від аналогічного руху по поверхні сферичного сегмента. Ковзаючи по поверхні конуса, частинка буде підніматися вгору, причому швидкість підйому буде зростати. Для сегмента сфери характерне гальмування швидкості V_r ковзання частинки при її підйомі вгору аж до «залипання» в околі екватора (див. рис.

3.19). Але саме у зоні гальмування відбувається найбільш інтенсивне соковиділення, про що свідчить різке зростання тиску на частинку (див. рис. 3.23).

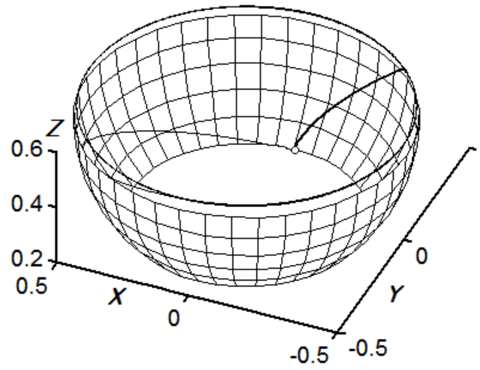


Рис. 3.33. Відносна (потовщена лінія) і абсолютна траєкторії руху частинки по обмеженій ділянці сегмента

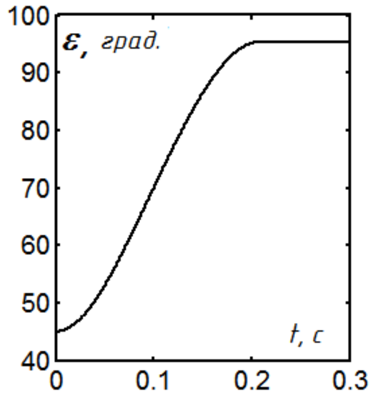


Рис. 3.34. Графік зміни кута ε для початкового значення ε_0=45°

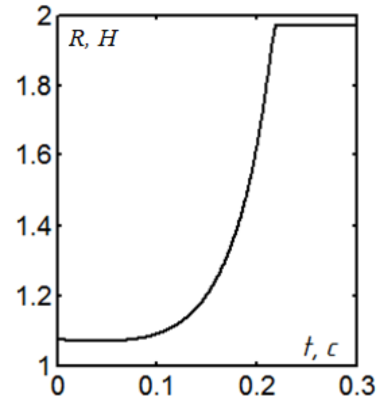


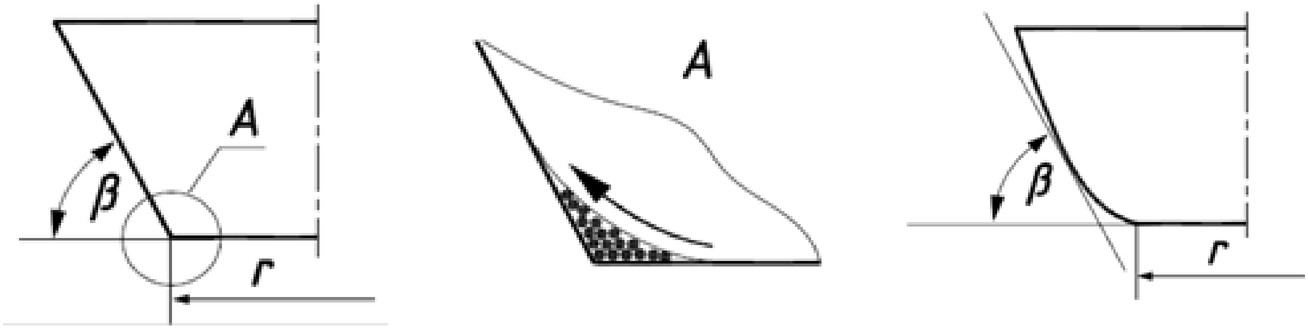
Рис. 3.35. Графік зміни реакції поверхні для частинки масою m=0,01 *кг*

Звичайно, у розглянутій моделі не враховуються перешкоди для руху, якими є отвори у стінці поверхні. Очевидно, що при обертанні конуса частина матеріалу рухається вгору і виходить за його межі, не віддавши повністю сік. Інша частина «залипає» і відділяється від поверхні за допомогою механічного пристрою з ручним приводом. Застосування ж сферичного сегменту дає можливість запобігти самовільному покиданню частинкою матеріалу робочої зони.

3.2.5. Рух частинки по внутрішній поверхні сегмента із меридіаном у формі параболи

Окрім циліндричних, конічних, сферичних форм обертових робочих органів з практичної і пізнавальної точки зору важливим є дослідження руху частинки по поверхні обертання із довільним наперед заданим меридіаном.

Практичним прикладом для висвітлення пропонованої методики є соковитискачі відцентрового типу, у яких подрібнений матеріал потрапляє на поверхню сита у вигляді конуса знизу з горизонтальної терки, яка теж обертається. Сито може бути як циліндричним, так і конічним. На рис. 3.36,а показана схема розташування терки у вигляді горизонтального диска радіуса *r* і сита у вигляді конуса з кутом β нахилу твірних.



а) б) в)

Рис. 3.36. Схема варіантів поверхні сита:

а) сито у вигляді конічної поверхні із кутом β нахилу твірних;

б) збільшений фрагмент поверхонь сита і терки з можливою новою формою внаслідок «залипання» частинок подрібненого матеріалу;

в) сито у вигляді поверхні обертання із змінним кутом β

Завдяки конічному ситу мезга може рухатися по його поверхні вгору для подальшого очищення сита, що неможливо у циліндричних ситах. Однак у циліндричних ситах ступінь забору соку вищий. Було розглянуто поверхню сита зі змінним кутом β, який по мірі підйому частинок мезги зростає (див. рис. 3.36,в). Це дасть можливість поєднати переваги обох сит.

Крім того, траєкторія руху частинок подрібненого матеріалу із терки на сито має особливу точку на межі цих поверхонь, яка полягає в стрибкоподібній зміні напряму руху. Внаслідок цього відбувається «залипання» матеріалу і формування такої поверхні, яка забезпечить прийнятну траєкторію (див. рис. 3.36,б). Фізична природа руху частинки вимагає траєкторію із плавною зміною кривини. Сито зі змінним кутом β, який у нижній точці дорівнює нулю (див. рис. 3.36,в), дозволяє уникнути явища «залипання».

З огляду на простоту аналітичного запису меридіаном поверхні обертання обрано вітку параболи, зміщену від осі симетрії на величину r. Параметричні рівняння поверхні обертання, для якої вітка параболи $z=b\cdot\rho^2$ є меридіаном, зміщеним від осі симетрії на величину r, мають вигляд:

$$
\begin{aligned}
X &= (\rho + r)\cos\alpha;\\
Y &= (\rho + r)\sin\alpha;\\
Z &= b\rho^2,
\end{aligned}
\qquad (3.104)
$$

де b=const – величина, яка впливає на форму поверхні;

ρ, α – незалежні змінні поверхні, які мають фізичний зміст: ρ – відстань від точки параболи до осі її симетрії; α – кут повороту радіус-вектора $\rho+r$ навколо осі OZ від нульового значення до точки на поверхні.

Поточне значення кута β знайдемо через похідну параболи $z'=\mathrm{tg}\beta$, тобто $2\cdot b\cdot\rho=\mathrm{tg}\beta$. На основі цього в рівняннях (3.104) можна перейти від змінної ρ до змінної β, внаслідок чого незалежними змінними поверхні будуть два кути:

$$
\begin{aligned}
X &= (2a\ \mathrm{tg}\beta + r)\cos\alpha;\\
Y &= (2a\ \mathrm{tg}\beta + r)\sin\alpha;\\
Z &= a\mathrm{tg}^2\beta,
\end{aligned}
\qquad (3.105)
$$

де між сталими a і b існує взаємозв’язок $a = \frac{b}{4}$.

Кут α змінюється в межах $\alpha=0...2\pi$, кут β – в межах $0...\ \beta_o<90^o$. Від значення кута β_o залежить висота відсіку поверхні.

Обертання відсіку поверхні обертання розглядалося по відношенню до двох систем координат: нерухомої $OXYZ$ і рухомої $Oxyz$, яка обертається разом із відсіком.

Якщо відсік поверхні (3.105) обертається навколо осі OZ із кутовою швидкістю ω, то за час t він повернеться на кут $\theta=\omega t$:

$$X = (2a\text{tg}\beta + r)\text{cos}\alpha\,\cos\theta - (2a\text{tg}\beta + r)\text{sin}\alpha\,\sin\theta;$$
$$Y = (2a\text{tg}\beta + r)\text{cos}\alpha\,\sin\theta + (2a\text{tg}\beta + r)\text{sin}\alpha\,\cos\theta; \qquad (3.106)$$
$$Z = a\text{tg}^2\beta.$$

Після спрощень із врахуванням $\theta=\omega t$ рівняння (3.106) набувають вигляду:

$$X = (2a\text{tg}\beta + r)\cos(\alpha + \omega t);$$
$$Y = (2a\text{tg}\beta + r)\sin(\alpha + \omega t); \qquad (3.107)$$
$$Z = a\text{tg}^2\beta.$$

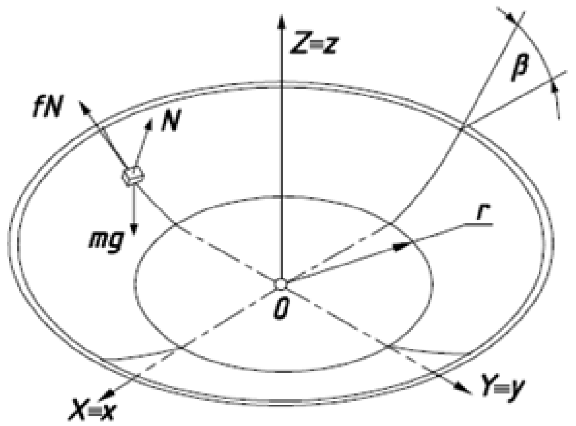
Нехай в початковий момент ($t=0$) дві системи координат збігаються, поверхня сита (3.104) і диск не обертаються і частинка знаходиться на меридіані в площині OYZ (див. 3.37,а). До неї прикладені сила ваги mg, реакція R поверхні та сила тертя $f{\cdot}R$. Аналогічно попереднім випадкам при обертанні диска зі сталою кутовою швидкістю ω за час t він повернеться на кут $\theta=\omega t$ (див. рис. 3.37,б). Якби частинка не ковзала по диску, то вона повернулася б разом з диском на кут θ і зайняла б положення на тому ж самому меридіані після його повороту. В результаті ковзання частинка займе положення на іншому меридіані (див. рис. 3.37,б). Ковзання частинки відбувається в протилежну сторону обертання диска. Напрям відносної швидкості V_r спрямований по дотичній до відносної траєкторії ковзання частинки (див. рис. 3.37,б).

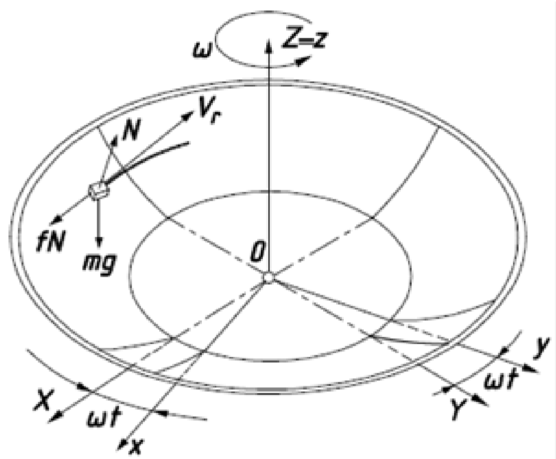
Рівняння руху частинки складаємо у вигляді (2.3). Усі вектори визначаємо в проекціях на осі нерухомої системи координат.

Траєкторія відносного руху частинки по відношенню до рухомої системи координат $Oxyz$ описується залежністю між криволінійними координатами (кутами) β і α поверхні (3.105). Таку залежність задаємо через спільну змінну – час t: $\beta=\beta(t)$, $\alpha=\alpha(t)$.

Відносну швидкість руху (ковзання) частинки по поверхні сита знаходимо диференціюванням рівнянь (3.105):

$$\begin{aligned} x_r' &= -\alpha'(2a\,\mathrm{tg}\beta + r)\sin\alpha + 2a\beta'\sec^2\beta\,\cos\alpha; \\ y_r' &= \alpha'(2a\,\mathrm{tg}\beta + r)\cos\alpha + 2a\beta'\sec^2\beta\,\sin\alpha; \\ z_r' &= 2a\beta'\sec^2\beta\,\mathrm{tg}\beta. \end{aligned} \qquad (3.108)$$





а) б)

Рис. 3.37. Розташування частинки на поверхні сита та схема прикладених до неї сил:
а) нерухома і рухома системи координат збігаються на початку руху;
б) сито разом із рухомою системою обертається, частинка ковзає по його поверхні

Величина швидкості ковзання частинки по поверхні сита у відносному русі має вигляд:

$$V_r = \sqrt{{x_r'}^2 + {y_r'}^2 + {z_r'}^2} = \sqrt{\alpha'^2(2a\,\mathrm{tg}\beta + r)^2 + 4a^2\beta'^2\sec^6\beta}. \qquad (3.109)$$

Одиничний вектор T дотичної до траєкторії відносного руху в проекціях на осі системи $OXYZ$ отримуємо діленням проекцій (3.108) на величину відносної швидкості (3.109):

$$T_x = \frac{-\alpha'(2a\text{tg}\beta + r)\sin\alpha + 2a\beta'\sec^2\beta\cos\alpha}{\sqrt{\alpha'^2(2a\text{tg}\beta + r)^2 + 4a^2\beta'^2\sec^6\beta}};$$
$$T_y = \frac{\alpha'(2a\text{tg}\beta + r)\cos\alpha + 2a\beta'\sec^2\beta\sin\alpha}{\sqrt{\alpha'^2(2a\text{tg}\beta + r)^2 + 4a^2\beta'^2\sec^6\beta}}; \qquad (3.110)$$
$$T_z = \frac{2a\beta'\sec^2\beta\text{tg}\beta}{\sqrt{\alpha'^2(2a\text{tg}\beta + r)^2 + 4a^2\beta'^2\sec^6\beta}}.$$

Реакція R поверхні (3.106) спрямована по нормалі $\overline{N}$ до неї і визначається із векторного добутку векторів, дотичних до координатних ліній поверхні. Проекціями цих векторів є частинні похідні рівнянь (3.105):

$$X_\beta = 2a\sec^2\beta\,\cos\alpha;\quad Y_\beta = 2a\sec^2\beta\,\sin\alpha;\quad Z_\beta = 2a\sec^2\beta\,\text{tg}\alpha;$$
$$X_\alpha = -(2a\,\text{tg}\beta + r)\sin\alpha;\quad Y_\alpha = (2a\,\text{tg}\beta + r)\cos\alpha;\quad Z_\alpha = 0. \qquad (3.111)$$

Після векторного множення векторів (3.111) і приведення отриманого вектора до одиничного проекції вектора нормалі $\overline{N}$ до поверхні запишуться:

$$N_x = -\sin\beta\,\cos\alpha;$$
$$N_y = -\sin\beta\,\sin\alpha; \qquad (3.112)$$
$$N_z = \cos\beta.$$

Абсолютну швидкість руху частинки по відношенню до нерухомої системи координат знаходимо диференціюванням рівнянь (3.107):

$$x'_a = -(\alpha' + \omega)(2a\,\text{tg}\beta + r)\sin(\alpha + \omega t) + 2a\beta'\sec^2\beta\,\cos(\alpha + \omega t);$$
$$y'_a = (\alpha' + \omega)(2a\,\text{tg}\beta + r)\cos(\alpha + \omega t) + 2a\beta'\sec^2\beta\,\sin(\alpha + \omega t); \qquad (3.113)$$
$$z'_a = 2a\beta'\sec^2\beta\,\text{tg}\beta.$$

Проекції вектора абсолютного прискорення на осі нерухомої системи координат знаходимо диференціюванням виразів (3.113):

$$
\begin{aligned}
&x_a'' = -[4a\beta'\sec^2\beta(\alpha' + \omega) + \alpha''(2a\,\mathrm{tg}\beta + r)]\sin(\alpha + \omega t) + \\
&+[2a(\beta'' + 2\beta'^2\mathrm{tg}\beta)\sec^2\beta - (\alpha' + \omega)^2(2a\,\mathrm{tg}\beta + r)]\cos(\alpha + \omega t); \\
&y_a'' = [4a\beta'\sec^2\beta(\alpha' + \omega) + \alpha''(2a\,\mathrm{tg}\beta + r)]\cos(\alpha + \omega t) + \\
&+[2a(\beta'' + 2\beta'^2\mathrm{tg}\beta)\sec^2\beta - (\alpha' + \omega)^2(2a\,\mathrm{tg}\beta + r)]\sin(\alpha + \omega t); \\
&z_a'' = 2a\sec^2\beta[\beta'^2\sec^2\beta + \mathrm{tg}\beta(\beta'' + 2\beta'^2\mathrm{tg}\beta)].
\end{aligned}
\tag{3.114}
$$

Одиничні вектори T (3.110) напряму відносної швидкості V_r і (3.111) нормалі $\overline{N}$ до поверхні знайдені для нерухомої поверхні. Оскільки поверхня повертається на кут $\theta=\omega\cdot t$, то вказані вектори теж потрібно повернути на цей кут, щоб вони відповідали розташуванню частинки. Після повороту проекції вказаних векторів запишуться:

– одиничного вектора дотичної до відносної траєкторії:

$$
\begin{aligned}
T_X &= \frac{-\alpha'(2a\,\mathrm{tg}\beta + r)\sin(\alpha + \omega t) + 2a\beta'\sec^2\beta\cos(\alpha + \omega t)}{\sqrt{\alpha'^2(2a\,\mathrm{tg}\beta + r)^2 + 4a^2\beta'^2\sec^6\beta}}; \\
T_Y &= \frac{\alpha'(2a\,\mathrm{tg}\beta + r)\cos(\alpha + \omega t) + 2a\beta'\sec^2\beta\sin(\alpha + \omega t)}{\sqrt{\alpha'^2(2a\,\mathrm{tg}\beta + r)^2 + 4a^2\beta'^2\sec^6\beta}}; \\
T_Z &= \frac{2a\beta'\sec^2\beta\,\mathrm{tg}\beta}{\sqrt{\alpha'^2(2a\,\mathrm{tg}\beta + r)^2 + 4a^2\beta'^2\sec^6\beta}}.
\end{aligned}
\tag{3.115}
$$

– одиничного вектора нормалі до поверхні:

$$
\begin{aligned}
N_X &= -\sin\beta\cos(\alpha + \omega t); \\
N_Y &= -\sin\beta\sin(\alpha + \omega t); \\
N_Z &= \cos\beta.
\end{aligned}
\tag{3.116}
$$

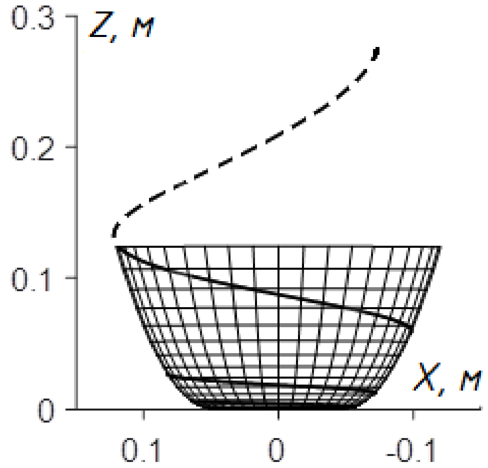
Підстановкою виразів (3.115), (3.116) і (3.114) у (3.102) отримаємо систему трьох рівнянь із трьома невідомими залежностями: $\alpha=\alpha(t)$, $\beta=\beta(t)$ і $R=R(t)$. Розв'яжемо її відносно α'', β'', R:

$$\begin{aligned}
&\beta'' = -\frac{\cos^3\beta}{2a}[g\sin\beta - (\omega+\alpha')^2(r\cos\beta + 2a\sin\beta)] - 3\beta'^2 - f\frac{\beta' A}{Vr};\\
&\alpha'' = -\frac{4a\beta'(\omega+\alpha')\sec\beta}{r\cos\beta + 2a\sin\beta} - f\frac{\alpha' A}{Vr};\\
&R = mA,
\end{aligned} \tag{3.118}$$

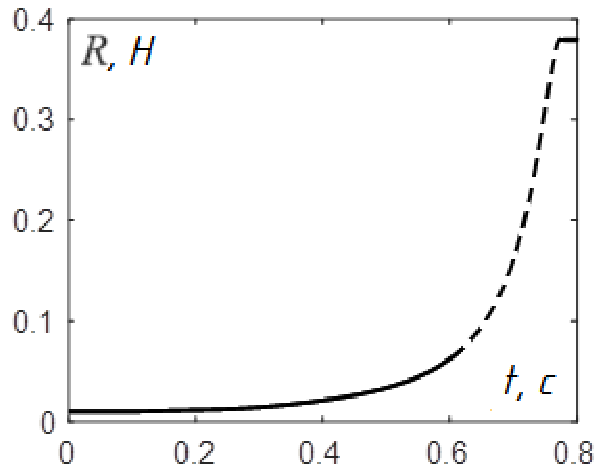
де $A = \sec\beta[(\omega+\alpha')^2(r\cos\beta + 2a\sin\beta)\sin\beta + g\cos^2\beta + 2a\beta'^2\sec^2\beta]$.

Знайдені залежності $\alpha=\alpha(t)$ і $\beta=\beta(t)$ потрібно підставити у рівняння (3.105) для того, щоб одержати відносну траєкторію ковзання частинки по руху ситу, і у рівняння (3.107), щоб одержати абсолютну траєкторію руху.

На рис. 3.38,а побудовано відносну траєкторію руху частинки по ситу при наступних параметрах: a=0,01, r=0,05 *м,* ω=50 c^{-1}, f=0,3.



а)



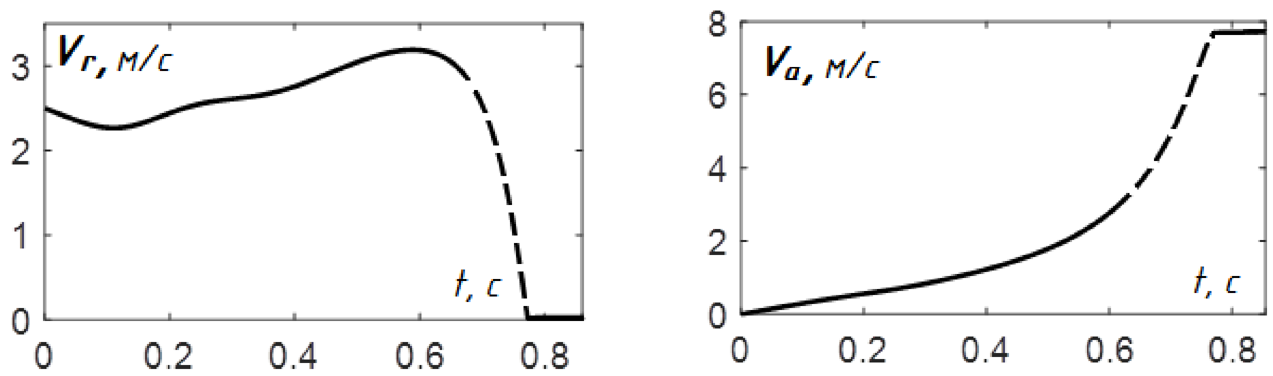
б)

Рис. 3.38. Характеристики руху частинки по ситу при a=0,01, r=0,05 *м,* ω=50 c^{-1}, f=0,3:

а) відносна траєкторія на фронтальній проекції;

б) графік реакції поверхні $R=R(t)$ для частинки масою m=0,001 *кг*

На рис. 3.38 та 3.39 суцільна крива стосується руху частинки в межах сита, а штрихова – по ситу у випадку, якби воно було продовжено вгору. На рис. 3.38,б такими ж лініями побудовано графік реакції поверхні $R=R(t)$ для частинки масою m=0,001 *кг*. Із нього видно, що реакція досягає максимальної величини близько 0,4 *Н* і стає сталою. Це означає, що ковзання частинки припинилося і вона обертається разом із ситом. Про це свідчать графіки відносної і абсолютної швидкостей ковзання (див. рис. 3.39).



а) б)

Рис. 3.39. Графіки зміни швидкості руху частинки по ситу при $a=0,01$, $r=0,05$ *м*, $\omega=50$ c^{-1}, $f=0,3$:

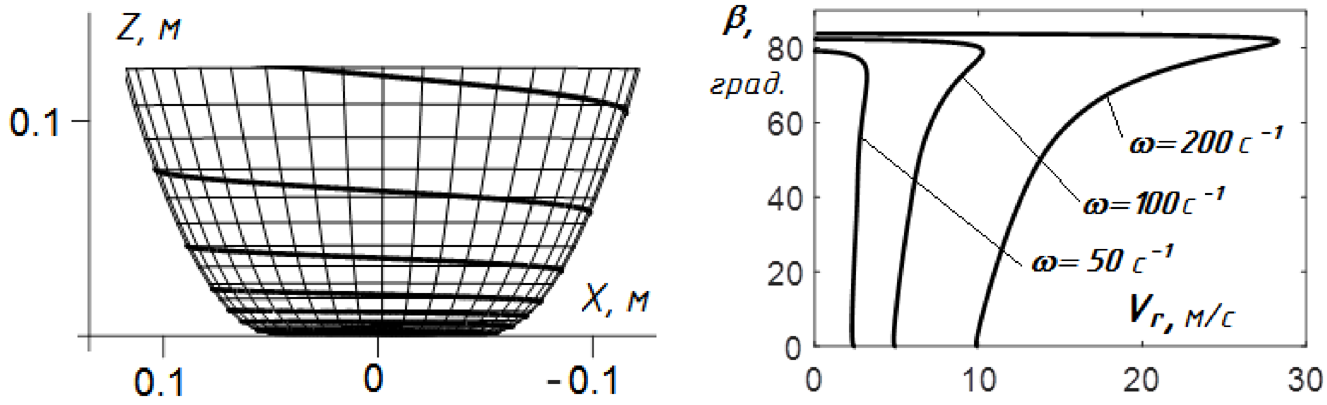
а) відносна швидкість;

б) абсолютна швидкість

Із рис. 3.38, видно, що найбільш інтенсивно сік буде сходити із сита перед «залипанням» частинок, тобто при різкому гальмуванні швидкості ковзання (див. рис. 3.39,а). Очевидно, що це відбувається завдяки зростанню кута β (див. рис. 3.36,в). У конічних ситах, в яких кут β сталий, гальмування швидкості ковзання не відбувається, через що у них значно нижчий ступінь забору соку у порівнянні із циліндричними ситами, у яких кут $\beta=90°$.

При збільшенні кутової швидкості ω обертання сита збільшується швидкість V_r ковзання частинки і при цьому змінюється її траєкторія: витки траєкторії розташовуються більш щільно у вертикальному напрямі (див. рис. 3.40,а).

На рис. 3.40,б показано, як змінюється швидкість ковзання частинки по мірі її підйому – у функції кута β при різних значеннях кутової швидкості обертання сита. Характерною ознакою графіків (див. рис. 3.40,б) є те, що початкова швидкість ковзання починається не з нуля, а з конкретного значення. Це пояснюється тим, що в момент зустрічі частинки з ситом кутова швидкість її ковзання визначається різницею кутової швидкості частинки (яка в момент зустрічі не обертається) і сита: $0–\omega=–\omega$. Ця величина ($–\omega$) є вихідною умовою інтегрування диференціальних рівнянь (3.117): $\alpha'_o=–\omega$.



а) б)

Рис. 3.40. Характеристики відносного руху частинки по ситу при a=0,01, r=0,05 *м*, f=0,3:

а) відносна траєкторія руху на фронтальній проекції при ω=100 c^{-1};

б) графіки залежностей $\beta=\beta(V_r)$ для різних значень кутової швидкості ω обертання сита

Другою характерною ознакою цих графіків є те, що вони прямують до нуля (перед «залипанням» частинки) при дуже вузькому діапазоні зміни кута β незалежно від кутової швидкості ω обертання сита. Згідно рис. 3.40,б цей діапазон знаходиться в межах 80°...85°. У цьому діапазоні ковзання частинки різко зменшується і вона «залипає». Тут також відбувається найбільш інтенсивний відбір соку від подрібненої маси. Виходячи з цього, в конструкції соковитискача можна передбачити очисний пристрій саме в цьому місці сита або ж зменшити його висоту для недопущення забивання сита. Парабола, яка в нашому випадку відіграє роль меридіана, не є прийнятною кривою, оскільки при кутах β>80° висота сита буде занадто великою незалежно від величини значення сталої a. У такому випадку за меридіан потрібно брати іншу криву з більш інтенсивним зростанням кута β, наприклад, дугу еліпса.

Слід відмітити, що рух окремої частинки зі сталим коефіцієнтом f сухого тертя не може ототожнюватися з рухом вологої подрібненої маси. Однак розв'язок спрощеної задачі для окремої частинки дасть змогу виявити закономірності її відносного руху і ці закономірності певною мірою стосуватимуться і всієї подрібненої маси.

3.2.6. Обґрунтування форми меридіана поверхні обертання, яка забезпечує заданий рух частинки по ній

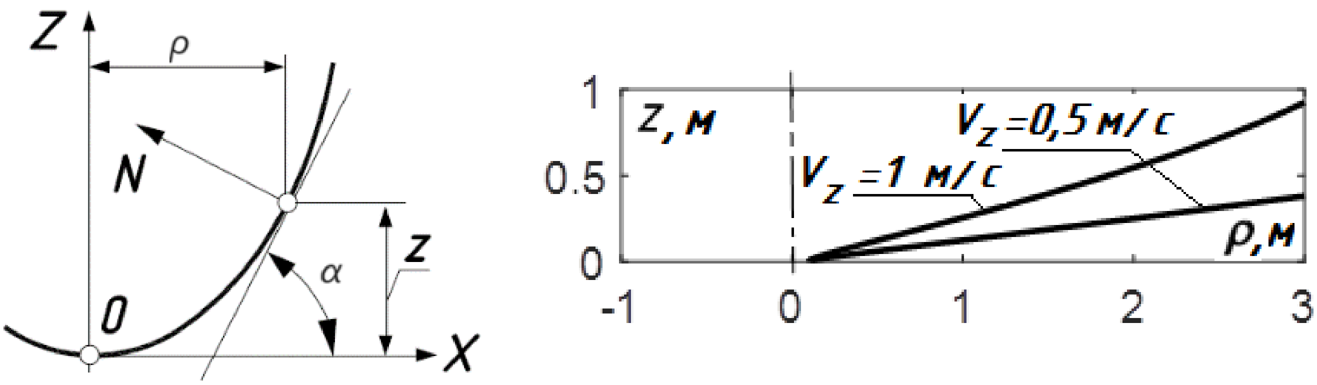
Розглянемо обернену задачу: обґрунтування поверхні обертання, яке зводиться до знаходження її меридіана за заданими умовами руху частинки. Такими умовами є траєкторно-кінематичні параметри руху частинки по внутрішній поверхні, яка здійснює обертання навколо власної осі. Криву меридіана задамо параметричними рівняннями у функції незалежної змінної – часу t. Це дозволяє впливати на характер руху частинки по поверхні формою її меридіана.

Параметричні рівняння поверхні обертання мають вигляд:

$$X = \rho\cos\alpha;$$
$$Y = \rho\sin\alpha; \qquad (3.118)$$
$$Z = z,$$

де ρ – відстань від осі обертання до точки на меридіані (див. рис. 3.41,а);
z – висота від початку координат до точки на меридіані (див. рис. 3.41,а);
α – кут, що задає положення точки на поверхні обертання.

Змінні ρ і z задають форму меридіана у вигляді параметричних рівнянь $z=z(t)$ і $\rho=\rho(t)$. Рівняння поверхні (3.118) залежить від двох змінних: часу t і кута α. Якщо і кут α зробити залежним від часу t ($\alpha=\alpha(t)$), то всі три рівняння (3.118) будуть функціями однієї змінної – часу t, тобто на поверхні (3.118) буде описана просторова крива, яка є траєкторією ковзання частинки по поверхні обертання.



а) б)

Рис. 3.41. Меридіани поверхні обертання:

а) зображення меридіана поверхні з нормаллю до нього в точці розташування частинки;

б) побудовані меридіани при $\omega=20\ c^{-1}$, $f=0{,}3$, $\rho_o=0{,}1\ м$ і різних швидкостях V_z

Обертання поверхні (3.118) розглядалося по відношенню до двох систем координат: нерухомої $OXYZ$ і рухомої $Oxyz$, яка буде обертатися разом із поверхнею. Якщо потрібно, щоб частинка в обертальному русі ковзала по поверхні проти годинникової стрілки на горизонтальній проекції, то саму поверхню треба обертати з кутовою швидкістю ω в протилежному напрямку (за годинниковою стрілкою). За час t вона повернеться на кут $\theta=-\omega t$. Поворот однієї системи координат відносно другої має вигляд:

$$X = \rho\cos\alpha\cos\theta - \rho\sin\alpha\sin\theta;$$
$$Y = \rho\cos\alpha\sin\theta + \rho\sin\alpha\cos\theta; \qquad (3.119)$$
$$Z = z.$$

Після спрощень із врахуванням $\theta=-\omega t$ рівняння (3.119) набувають вигляду:

$$X = \rho\cos(\omega t - \alpha);$$
$$Y = -\rho\sin(\omega t - \alpha); \qquad (3.120)$$
$$Z = z.$$

Якщо α в рівняннях (3.120) є незалежною змінною, то вони опишуть поверхню. Якщо ж $\alpha = \alpha(t)$, то рівняння (3.120) опишуть абсолютну траєкторію руху частинки. В такому випадку літери *«X», «Y», «Z»* потрібно замінити на строчні відповідно до прийнятих позначень.

Вектор ваги mg частинки спрямований вниз паралельно осі OZ:

$$[0; \quad 0; \quad -1]. \qquad (3.121)$$

Проекції швидкості відносного руху знайдемо диференціюванням рівнянь (3.118) за умови, що вони всі є функціями часу t:

$$x_r' = \rho'\cos\alpha - \alpha'\rho\sin\alpha;$$
$$y_r' = \rho'\sin\alpha + \alpha'\rho\cos\alpha; \qquad (3.122)$$
$$z_r' = z'.$$

Величина швидкості ковзання частинки по сферичному диску у відносному русі запишеться:

$$V_r = \sqrt{{x_r'}^2 + {y_r'}^2 + {z_r'}^2} = \sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2\rho^2 + z'^2}. \qquad (3.123)$$

Враховуючи те, що сила тертя $f{\cdot}R$ спрямована в протилежну сторону вектору відносної швидкості, запишемо одиничний напрямний вектор дії сили тертя із протилежним знаком:

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\rho'\cos\alpha - \alpha'\rho\,\sin\alpha}{\sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2\rho^2 + z'^2}}; \\ -\dfrac{\rho'\sin\alpha + \alpha'\rho\,\cos\alpha}{\sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2\rho^2 + z'^2}}; \\ -\dfrac{z'}{\sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2\rho^2 + z'^2}} \end{bmatrix}. \tag{3.124}$$

Сила реакції R поверхні спрямована вздовж нормалі $\overline{N}$ до поверхні. Цей вектор розташований в площині меридіана (див. рис. 3.41,а) і перпендикулярний до дотичної в поточній точці. Потрібно забезпечити, щоб його напрям збігався із напрямом дії реакції R поверхні, тобто його горизонтальна проекція повинна бути спрямована в сторону осі обертання (див. рис. 3.41,а). Проекції одиничного вектора меридіана в площині ZOX (див. рис. 3.41,а) мають вигляд:

$$\left[-\frac{z'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}; \quad \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}\right]. \tag{3.125}$$

Враховуючи кут повороту площини меридіана навколо осі OZ, одиничний вектор (3.125) запишемо в проекціях на осі просторової системи координат $OXYZ$. Він є напрямним вектором дії сили реакції R поверхні на частинку:

$$\left[-\frac{z'\cos\alpha}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}; \quad -\frac{z'\sin\alpha}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}; \quad \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}\right]. \tag{3.126}$$

Знайдемо вектор $\overline{\omega}$ абсолютного прискорення в проекціях на осі системи координат $OXYZ$. Проекції абсолютної швидкості руху частинки знаходимо диференціюванням рівнянь (3.120):

$$x_a' = \rho'\cos(\omega t - \alpha) - \rho(\omega - \alpha')\sin(\omega t - \alpha);$$
$$y_a' = -\rho'\sin(\omega t - \alpha) - \rho(\omega - \alpha')\cos(\omega t - \alpha); \qquad (3.127)$$
$$z_a' = z'.$$

Проекції вектора абсолютного прискорення на осі нерухомої системи координат знаходимо диференціюванням виразів (3.126):

$$x_a'' = \big(\alpha''\rho - 2\rho'(\omega - \alpha')\big)\sin(\omega t - \alpha) + (\rho'' - \rho(\omega - \alpha')^2)\cos(\omega t - \alpha);$$
$$y_a'' = \big(\alpha''\rho - 2\rho'(\omega - \alpha')\big)\cos(\omega t - \alpha) - (\rho'' - \rho(\omega - \alpha')^2)\sin(\omega t - \alpha); \qquad (3.128)$$
$$z_a'' = z''.$$

За формулами (3.119) повернемо одиничні напрямні вектори дії сили тертя $f{\cdot}R$ (3.124) і реакції R поверхні (3.126) на кут $\theta = -\omega t$, щоб вони відповідали розташуванню частинки. Після повороту проекції вказаних векторів запишуться:

– одиничного напрямного вектора дії сили тертя $f{\cdot}R$:

$$\begin{bmatrix} -\dfrac{\rho'\cos(\omega t - \alpha) + \alpha'\rho\sin(\omega t - \alpha)}{\sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2\rho^2 + z'^2}}; \\ \dfrac{\rho'\sin(\omega t - \alpha) - \alpha'\rho\cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2\rho^2 + z'^2}}; \\ -\dfrac{z'}{\sqrt{\rho'^2 + \alpha'^2\rho^2 + z'^2}} \end{bmatrix}. \qquad (3.129)$$

– одиничного напрямного вектора дії сили реакції R:

$$\left[-\frac{z'\cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}; \quad \frac{z'\sin(\omega t - \alpha)}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}; \quad \frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}}\right]. \qquad (3.130)$$

Векторне рівняння (2.3) в проекціях на осі нерухомої системи координат $OXYZ$ запишеться із урахуванням одиничного вектора (3.121) напряму дії сили ваги mg, одиничного вектора (3.129) напряму дії сили тертя $f \cdot R$ і одиничного вектора (3.130) напряму дії сили реакції R наступним чином:

$$
\begin{aligned}
mx_a'' &= -R\frac{z'\cos(\omega t-\alpha)}{\sqrt{\rho'^2+z'^2}} - fR\frac{\rho'\cos(\omega t-\alpha)+\alpha'\rho\sin(\omega t-\alpha)}{\sqrt{\rho'^2+\alpha'^2\rho^2+z'^2}};\\
my_a'' &= R\frac{z'\sin(\omega t-\alpha)}{\sqrt{\rho'^2+z'^2}} + fR\frac{\rho'\sin(\omega t-\alpha)-\alpha'\rho\cos(\omega t-\alpha)}{\sqrt{\rho'^2+\alpha'^2\rho^2+z'^2}};\\
mz_a'' &= -mg + R\frac{\rho'}{\sqrt{\rho'^2+z'^2}} - fR\frac{z'}{\sqrt{\rho'^2+\alpha'^2\rho^2+z'^2}}.
\end{aligned}
\tag{3.131}
$$

Підставимо у (3.131) вирази абсолютного прискорення (3.128) і отримаємо систему трьох диференціальних рівнянь із чотирма невідомими залежностями: $\alpha=\alpha(t)$, $\rho=\rho(t)$, $z=z(t)$ і $R=R(t)$. Для її розв’язку одна із цих залежностей повинна бути наперед заданою. Поставимо умову: швидкість підйому частинки вгору в напрямі осі OZ має бути сталою і рівною V_z. Тоді $z'=V_z$, $z''=0$. Підставимо ці значення у (3.131) і розв’яжемо систему відносно α'', ρ'' і R:

$$
\begin{aligned}
\alpha'' &= 2\frac{\rho'}{\rho}(\omega-\alpha') - \frac{Afg\alpha'}{\rho' V_r - fAV_z};\\
\rho'' &= \rho(\omega-\alpha')^2 - g\frac{V_r V_z + Af\rho'}{\rho' V_r - fAV_z};\\
R &= \frac{mAgV_r}{\rho' V_r - fAV_z},
\end{aligned}
\tag{3.132}
$$

де $V_r = \sqrt{\rho'^2+\alpha'^2\rho^2+V_z^2}$;

$A = \sqrt{\rho'^2+V_z^2}$.

Система (3.132) фактично є системою двох перших рівнянь відносно невідомих залежностей $\alpha=\alpha(t)$ і $\rho=\rho(t)$, а залежність $R=R(t)$ знаходиться після розв’язання цієї системи. Оскільки $z'=V_z$, то $z=V_z t$. Ця залежність разом зі знайденою залежністю $\rho=\rho(t)$ описує меридіан поверхні обертання. На рис. 3.41,б чисельними методами побудовано меридіан для двох значень V_z. Меридіан починається не з початку координат, оскільки було задане початкове значення ρ_o=0,1 *м*. Отримана поверхня обертання близька до конічної, причому по мірі зменшення швидкості V_z меридіан наближається до прямої лінії, а сама поверхня – до площини (при V_z=0 конус перетворюється в площину і частинка ковзає по горизонтальному диску). При будь-якій кутовій швидкості ω його обертання підйому частинки не буде (V_z=0). Підставимо V_z=0 у рівняння (3.133):

$$\begin{aligned} &\alpha'' = 2\frac{\rho'}{\rho}(\omega - \alpha') - fg\frac{\alpha'}{\sqrt{\rho^2\alpha'^2 + \rho'^2}}; \\ &\rho'' = \rho(\omega - \alpha')^2 - fg\frac{\rho'}{\sqrt{\rho^2\alpha'^2 + \rho'^2}}; \\ &R = mg. \end{aligned} \tag{3.133}$$

Рівняння (3.133) точно збігаються із диференціальними рівняннями руху частинки по горизонтальному диску, що обертається навколо вертикальної осі.

Розглянемо ще один частковий випадок. Нехай $\alpha''=0$, $\alpha'=\omega$ – частинка при ковзанні по поверхні обертається навколо її осі зі сталою кутовою швидкістю, рівною кутовій швидкості обертання поверхні. Кутові швидкості спрямовані в протилежні сторони, тому в абсолютному русі обертання частинки відсутнє. Підстановкою цих умов у (3.128) і (3.131) отримаємо: $\rho''=0$ ($\rho=\rho_o$=const, $z''=-g$, $R=0$). Це означає, що поверхнею обертання є вертикальний циліндр. Прискорення частинки стале і рівне – g, отже вона перебуває у стані вільного падіння вниз. Реакція $R=0$, тому кутова швидкість ω обертання циліндра не впливає на падіння частинки.

3.3. Аналітичний опис руху частинки по комбінованій поверхні, яка здійснює обертальний рух

3.3.1. Рух частинки по сферичному сегменту з лопатками

Для збільшення швидкості розгону розсіювальні апарати сферичної форми додатково укомплектовують вертикальними лопатками різної конфігурації, вздовж яких змушена рухатися частинка в радіальному напрямі [113, 114, 186, 211, 212, 232, 241, 252, 288, 314]. Від конструктивно-кінематичних параметрів робочих органів апарату залежать траєкторно-кінематичні характеристики руху матеріалу.

Спершу виведемо закономірності руху частинок у відцентровому апараті у вигляді поверхні сферичного сегмента із радіально розташованими вертикальними лопатками.

Сферичний сегмент задається двома конструктивними параметрами: кутом підйому β частинки в момент її сходження з поверхні сегмента вздовж вертикальної лопатки і діаметром *d* (див. рис. 3.42).

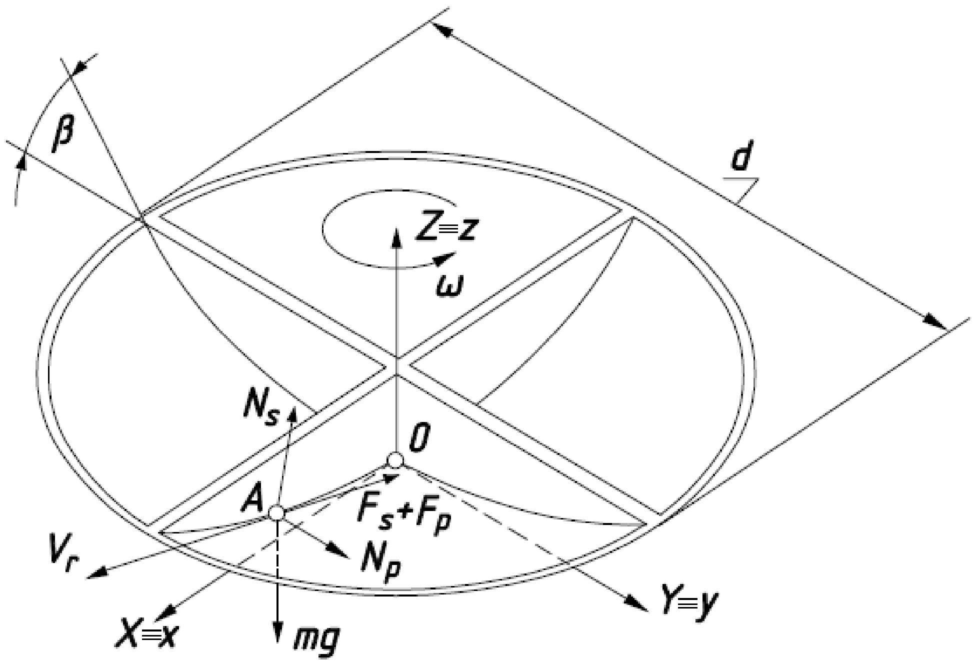


Рис. 3.42. Робочий орган відцентрового апарату з вертикальними лопатками та положення частинки в точці *A* із прикладеними до неї силами

Виходячи з цих умов, знаходимо радіус r_0 сфери:

$$r_0 = \frac{d}{2\,\sin\beta}. \qquad (3.135)$$

Щоб за рівняннями (3.90) побудувати сферичний сегмент із заданими конструктивними параметрами d, β і r_0 згідно формули (3.135), кути ε і α повинні змінюватися в наступних межах: $\varepsilon=0\ldots\ \beta$, $\alpha=0\ldots 2\pi$.

Частинка під час обертання диска з кутовою швидкістю ω має контакт із поверхнями сферичного сегмента і плоскої лопатки та ковзає вздовж їхньої спільної лінії – кола радіуса r_0. Його рівняння можна отримати із (3.90) при $\alpha=0$:

$$\begin{aligned} x &= r_0\,\sin\varepsilon; \\ y &= 0; \\ z &= r_0(1-\cos\varepsilon). \end{aligned} \qquad (3.136)$$

Лінія (3.136) є траєкторією відносного руху – траєкторією її ковзання. Під час обертання диска за час t крива разом із диском повернеться на кут $\theta=\omega t$. За цей час частинка переміститься по кривій (3.136) в сторону периферії диска (див. рис. 3.43). На рис. 3.42 показано дві системі координат: нерухому $OXYZ$ і рухому $Oxyz$, по відношенню до яких описується рух частинки та які збігаються в початковий момент руху.

Задамо відносну траєкторію руху частинки по кривій (3.136) у вигляді залежності $\varepsilon=\varepsilon(t)$, яка є шуканою.

Знайдемо абсолютну траєкторію руху частинки. За час t вона здійснила відносне переміщення по кривій за рівняннями (3.136) і поворот на кут $\theta=\omega t$ (див. рис. 3.43). Вертикальна координата для обох систем однакова: $Oz\equiv OZ$. Отже, абсолютну траєкторію переміщення частинки знайдемо поворотом рухомої системи з координатами (3.136) частинки по відношенню до нерухомої навколо осі OZ:

$$x_a = x\cos\theta - y\sin\theta;$$
$$y_a = x\sin\theta + y\cos\theta; \qquad (3.137)$$
$$z_a = z.$$

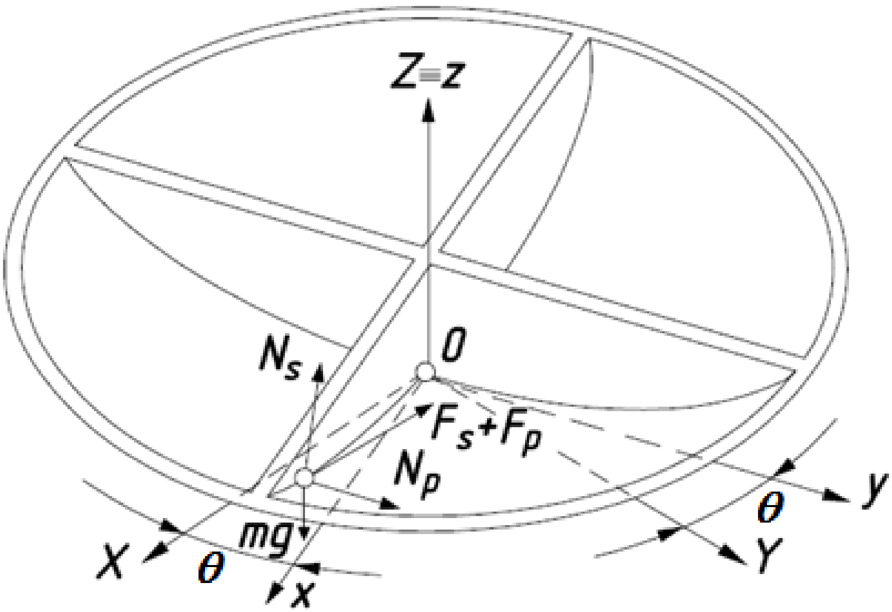


Рис. 3.43. Робочий орган відцентрового апарату з вертикальними лопатками та положення частинки із прикладеними до неї силами після повороту на кут $\theta=\omega t$

Підставимо в (3.137) рівняння (3.136) та вираз для кута $\theta=\omega t$ і отримаємо параметричні рівняння абсолютної траєкторії руху частинки:

$$x_a = r_0\sin\varepsilon\cos(\omega t);$$
$$y_a = r_0\sin\varepsilon\sin(\omega t); \qquad (3.138)$$
$$z_a = r_0(1-\cos\varepsilon).$$

До частинки прикладені сила ваги mg, реакція R_s поверхні сферичного диску, реакція R_p поверхні лопатки, сила тертя $F_s=f_sR_s$ при ковзанні частинки по поверхні диска, сила тертя $F_p=f_pR_p$ при ковзанні частинки по поверхні лопатки (f_s і f_p – коефіцієнти тертя частинки по поверхні диска і лопатки відповідно). Усі сили мають строго визначений напрям дії. Для початкового моменту руху (коли обидві системи координат збігаються) вони зображені на рис. 3.42.

Сила ваги спрямована вниз. Її проекції запишуться:

$$[0; \quad 0; \quad -mg]. \tag{3.139}$$

Реакція R_p лопатки спрямована перпендикулярно до неї – збігається із напрямом осі Oy. Проекції одиничного вектора реакції R_p запишуться:

$$[0; \quad 1; \quad 0]. \tag{3.140}$$

Реакція R_s сферичного диска (сегмента) спрямована перпендикулярно до його поверхні, а саме до центра сфери. Радіус-вектор кола (3.136), вздовж якого визначається напрямний вектор реакції R_s, спрямований від центра сфери до точки на кривій при умові, що початок координат знаходиться у центрі сфери. Отже, напрямний вектор буде спрямований у протилежну сторону. Його проекції запишуться:

$$[-\sin\varepsilon; \quad 0; \quad \cos\varepsilon]. \tag{3.141}$$

Обидві сили тертя F_s і F_p спрямовані по дотичній до траєкторії відносного руху частинки в протилежну сторону швидкості V_r її ковзання (див. рис. 3.42). Знайдемо одиничний вектор напряму відносної швидкості V_r, вздовж якого діє сила сумарна сила тертя F_s+F_p. Для цього продиференціюємо відносну траєкторію (3.136):

$$\begin{aligned} x' &= r_0\varepsilon'\cos\varepsilon; \\ y' &= 0; \\ z' &= r_0\varepsilon'\sin\varepsilon. \end{aligned} \tag{3.142}$$

Вираз величини відносної швидкості частинки має вигляд:

$$V_r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = r_0 \varepsilon'^2. \qquad (3.143)$$

Вирази одиничного вектора відносної швидкості V_r в проекціях на осі рухомої системи *Oxyz* отримаємо діленням проекцій відносної швидкості (3.142) на її величину (3.143):

$$[\cos\varepsilon; \quad 0; \quad \sin\varepsilon]. \qquad (3.144)$$

Після повороту диска разом із рухомою системою координат *Oxyz* на кут $\theta=\omega t$ частинка займе нове положення на кривій, а сама крива теж повернеться на цей кут. Поворот здійснюють і прикладені до частинки вектори сил, які в рухомій системі не змінюють напряму. Після повороту векторів (3.140), (3.141), (3.144) на кут $\theta=\omega t$ навколо осі *OZ* їх проекції на нерухому систему будуть описані наступними виразами:

– одиничний вектор реакції R_p лопатки:

$$[-\sin\omega t; \quad \cos\omega t; \quad 0], \qquad (3.145)$$

– одиничний вектор реакції R_s сферичного диска:

$$[-\sin\varepsilon \cos\omega t; \quad -\sin\varepsilon \sin\omega t; \quad \cos\varepsilon], \qquad (3.146)$$

– одиничний вектор відносної швидкості V_r:

$$[\cos\varepsilon \cos\omega t; \quad \cos\varepsilon \sin\omega t; \quad \sin\varepsilon]. \qquad (3.147)$$

Напрям дії сили ваги (3.139) частинки при повороті диска не змінюється.

Проекції абсолютної швидкості частинки на осі нерухомої системи координат *OXYZ* отримуємо диференціюванням рівнянь (3.138):

$$x_a' = r_0\varepsilon'\cos\varepsilon\cos\omega t - r_0\omega\sin\varepsilon\sin\omega t;$$
$$y_a' = r_0\varepsilon'\cos\varepsilon\sin\omega t + r_0\omega\sin\varepsilon\cos\omega t; \quad (3.148)$$
$$z_a' = r_0\varepsilon'\sin\varepsilon.$$

Величина абсолютної швидкості запишеться:

$$V_a = \sqrt{{x_a'}^2 + {y_2'}^2 + {z_a'}^2} = r_0\sqrt{\varepsilon'^2 + \omega^2\sin^2\varepsilon}. \quad (3.149)$$

Проекції вектора абсолютного прискорення отримаємо диференціюванням виразів (3.148):

$$x_a'' = r_0(\varepsilon''\cos\omega t - 2\omega\varepsilon'\sin\omega t)\cos\varepsilon - r_0(\varepsilon'^2 + \omega^2)\sin\varepsilon\cos\omega t;$$
$$y_a'' = r_0(\varepsilon''\sin\omega t + 2\omega\varepsilon'\cos\omega t)\cos\varepsilon - r_0(\varepsilon'^2 + \omega^2)\sin\varepsilon\sin\omega t; \quad (3.150)$$
$$z_a'' = r_0\varepsilon''\sin\varepsilon + r_0\varepsilon'^2\cos\varepsilon.$$

Векторне рівняння (2.3) розпишемо в проекціях на осі нерухомої системи координат *OXYZ*. Напрям дії реакцій лопатки R_p і сферичного диска R_s задано одиничними векторами (3.145) і (3.146). Напрям сумарної сили тертя $F_s+F_p= f_sR_s+f_pR_p$ задається одиничним вектором (3.147) з протилежним знаком. Отримаємо три рівняння:

$$x_a'' = -R_p\sin\omega t - R_s\sin\varepsilon\cos\omega t - \left(f_sR_s + f_pR_p\right)\cos\varepsilon\cos\omega t;$$
$$y_a'' = R_p\cos\omega t - R_s\sin\varepsilon\sin\omega t - \left(f_sR_s + f_pR_p\right)\cos\varepsilon\sin\omega t; \quad (3.151)$$
$$z_a'' = R_s\cos\varepsilon - \left(f_sR_s + f_pR_p\right)\sin\varepsilon - mg.$$

Підставимо у (3.151) вирази абсолютного прискорення із (3.150) і отримаємо систему трьох диференціальних рівнянь із трьома невідомими функціями: $\varepsilon=\varepsilon(t)$, $R_s=R_s(t)$ і $R_p=R_p(t)$. Розв'яжемо її відносно ε'', R_s, R_p:

$$\varepsilon'' = \left(\omega^2 \sin\varepsilon - 2\varepsilon'\omega f_p - \frac{g}{r_0} f_s\right)\cos\varepsilon - \left(\frac{g}{r_0} + f_s\omega^2 \sin\varepsilon\right)\sin\varepsilon - \varepsilon'^2 f_s. \tag{3.152}$$

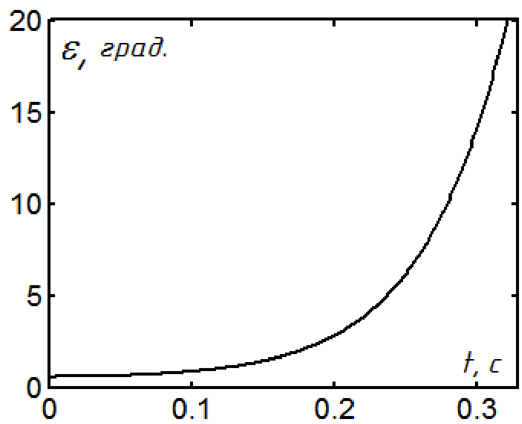
$$R_s = m(r_0\varepsilon'^2 + g\cos\varepsilon + r_0\omega^2\sin^2\varepsilon). \tag{3.153}$$

$$R_p = 2mr_0\omega\varepsilon'\cos\varepsilon. \tag{3.154}$$

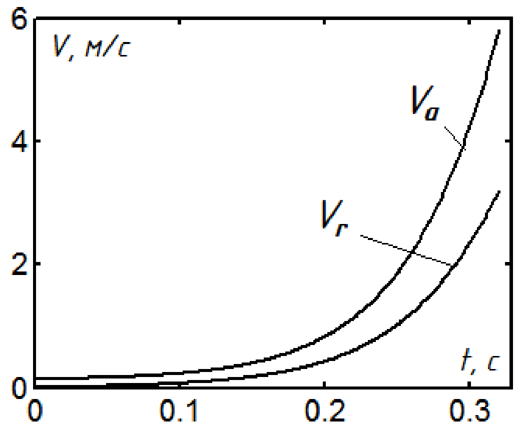
Диференціальне рівняння (3.152) не залежить від (3.153) і (3.154), тому може бути розв’язане окремо. Після цього можуть бути знайдені реакції поверхонь (3.153) і (3.154).

Розглянемо приклад. Нехай параметри сферичного диска є наступними: діаметр d=0,4 *м*, кут β=20°. За формулою (3.135) знаходимо третій конструктивний параметр r_0=0,58 *м*. При чисельному інтегруванні диференціального рівняння (3.152) часу t потрібно надавати такого значення, щоб кут ε не виходив за межі кута β. У момент, коли $\varepsilon=\beta$, частинка знаходиться на зовнішній крайці диска.

На рис. 3.44,а побудовано залежність $\varepsilon=\varepsilon(t)$ для наведених конструктивних параметрів і при $f_s=f_p$=0,3, ω=25 c^{-1}. Початкове значення кута ε не дорівнює нулю, бо частинка не може знаходитися на осі обертання. У такому випадку відсутня відцентрова сила і частинка не розпочне рух. Для досягнення периферії диска частинка розганяється протягом 0,32 *с* (див. рис. 3.44,а).



а)



б)

Рис. 3.44. Графіки, що характеризують рух частинки при $f_s=f_p$=0,3, ω=25 c^{-1}:

а) графік зміни кута ε;

б) графіки зміни абсолютної V_a і відносної V_r швидкостей

Графіки зміни відносної і абсолютної швидкостей показано на рис. 3.44,б. В момент сходу з диска відносна і абсолютна швидкості мають наступні значення: V_r=3,2 *м/с*, V_a=5,8 *м/с.* На рис. 3.45 за формулами (3.153), (3.154) побудовано графіки зміни сили реакції сферичного диска R_s і лопатки R_p на частинку масою m=0,01 *кг*.

Якби сферичний сегмент не було обмежено кутом β, то частинка піднімалась би по внутрішній поверхні сфери до певної висоти. Чисельне інтегрування диференціального рівняння (3.152) при тривалості руху t=2,5 *с* показало, що кут ε за проміжок часу 0,5 *с* досягає максимального значення (ε=90°), а потім починаються його затухаючі коливання (див. рис. 3.46).

Це означає, що частинка піднімається на висоту півсфери, а потім починає опускатися. Її спуск чергується з підйомом аж до повної зупинки частинки на певній висоті. Для наведеного на рис. 3.46 випадку зупинці частинки відповідає кут ε=70°, тобто частинка «залипає» на висоті, близькій до півсфери і далі обертається разом із нею.

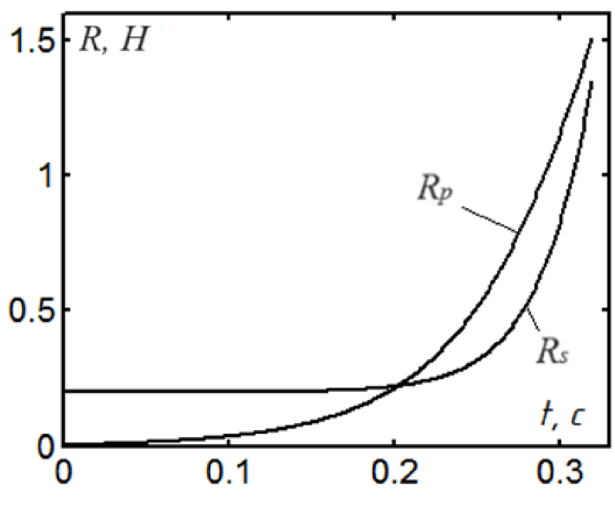


Рис. 3.45. Графіки зміни сили реакцій сферичного диска R_s і лопатки R_p

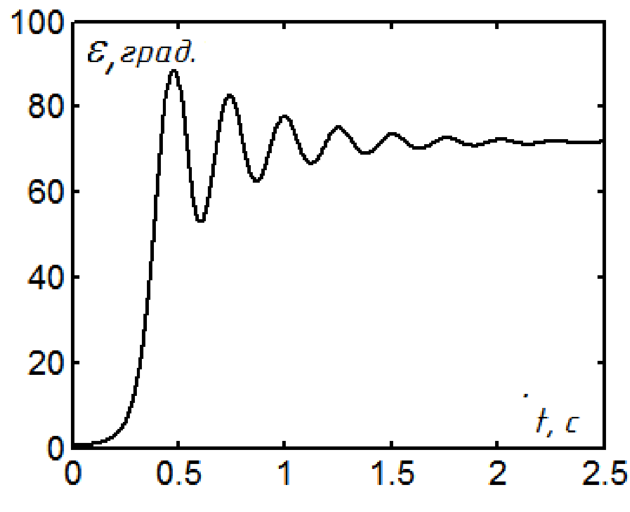


Рис. 3.46. Графік зміни кута $\varepsilon=\varepsilon(t)$

Кут «залипання» може бути визначено аналітично. При «залипанні» частинки $\varepsilon'=\varepsilon''=0$. Підстановка цих значень у диференціальне рівняння (3.152) приводить до тригонометричного рівняння відносно невідомого кута ε:

$$(r_0\omega^2\sin\varepsilon - gf_s)\cos\varepsilon - (g + r_0 f_s\omega^2\sin\varepsilon)\sin\varepsilon = 0. \tag{3.155}$$

Для розв’язання рівняння (3.155) потрібно застосовувати чисельні методи. Однак при $f_s=0$, тобто при абсолютно гладенькій поверхні диска, воно суттєво спрощується і має простий розв’язок:

$$\varepsilon = \arccos\frac{g}{r_0\omega^2}. \tag{3.156}$$

Чисельні методи обчислень показали, що при $f_s=0$ і $f_p\neq 0$ затухаючі коливання кута ε наближаються до значення, яке можна знайти за формулою (3.156). Відповідно до неї при необмеженому зростанні кутової швидкості обертання диска кут ε прямує до $90°$, тобто частинка «залипає» на висоті центра сфери. Якщо ж обидві поверхні абсолютно гладенькі ($f_s=f_p=0$), коливання відбуваються нескінченно довго.

Крім того, з метою збільшення швидкості розгону матеріалу вздовж лопаток при однакових інших умовах (діаметру диска, кутовій швидкості його обертання, куті сходу частинок із диска по відношенню до поверхні поля) досліджено випадки сферичної форми розсіювального апарата ще двох конфігурацій: з вертикальними лопатками, що не мають точки перетину в центрі диска (див. рис. 3.47), та з криволінійними лопатками (див. рис. 3.48). У першому випадку лопаті розташовані під кутом 90° одна до одної (див. рис. 3.47), а у другому – лопаті рівномірно розподілені по колу (див. рис. 3.48).

Кожна з конструкцій має свої переваги. Конструкція дисків з суцільними прямолінійними лопатками підвищує надійність робочого органу. Відсутність точки перетину лопаток в центрі диска забезпечує можливість прямої подачі матеріалу на робочий орган. Застосування криволінійних лопаток збільшує дальність польоту частинок.

На три розглянуті конструкції робочих органів відцентрового апарату отримано патенти України на корисну модель.

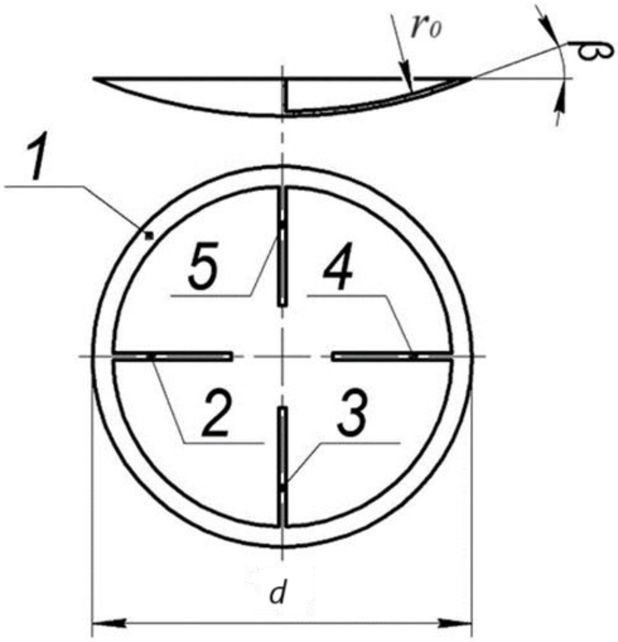


Рис. 3.47. Робочий орган відцентрового апарату з вертикальними лопатками: 1 – обертовий диск, 2, 3, 4, 5 – лопатки

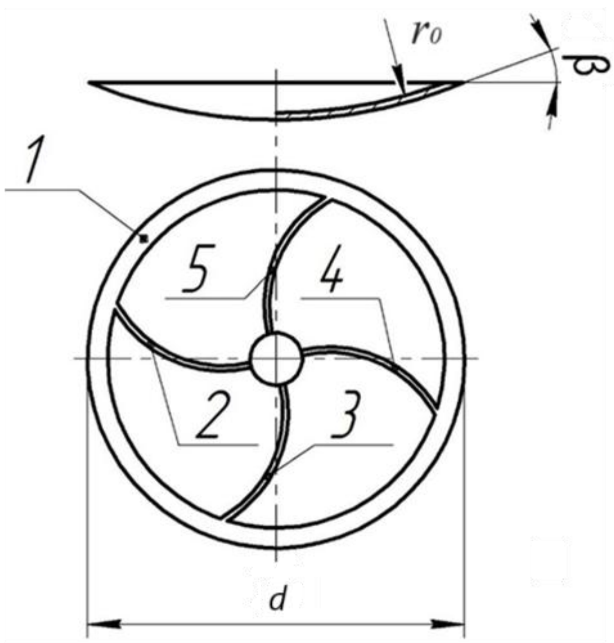


Рис. 3.48. Робочий орган відцентрового апарату з криволінійними лопатками у вигляді дуги кола, дотичної до радіуса диска у його центрі. Криволінійна вісь випукла у напрямку, протилежному напрямку обертання диска: 1 – обертовий диск, 2, 3, 4, 5 – лопатки

3.3.2. Рух частинки по вертикальному гвинтовому коноїду зі співвісним циліндром

Гелікоїд утворюється гвинтовим рухом прямолінійної твірної, яка може перетинати або не перетинати вісь, бути до неї перпендикулярною або не перпендикулярною. Найбільш поширеним у техніці є гелікоїд, у якого прямолінійна твірна перетинає вісь під прямим кутом (гвинтовий коноїд, який за технічною термінологією називається шнеком).

Підйом матеріалу шнеками всередині циліндричного кожуха широко застосовується в гвинтових конвеєрах, при цьому циліндричний кожух є нерухомим [298]. Заслуговує на увагу дослідження руху частинки всередині конструкції, яка складає одне ціле із циліндра і співвісної смуги гвинтового коноїда, і яка обертається навколо спільної вертикальної осі (див. рис. 3.49). Така конструкція є універсальним і ефективним елементом у машинах для транспортування, дозування, змішування та обробки матеріалів.

При русі частинки під дією власної ваги по поверхні нерухомого вертикального гвинтового коноїда вона віддаляється від його осі. Це відбувається через те, що частинка рухається по криволінійній траєкторії, внаслідок чого виникає відцентрова сила, яка спричинює рух частинки на периферію до зустрічі з поверхнею циліндра. Лінією перетину коноїда і циліндра є гвинтова лінія. На рис. 3.49 вона показана потовщеною. Частинка буде ковзати по цій гвинтовій лінії, маючи одночасний контакт із поверхнею коноїда (шнека) і циліндра.

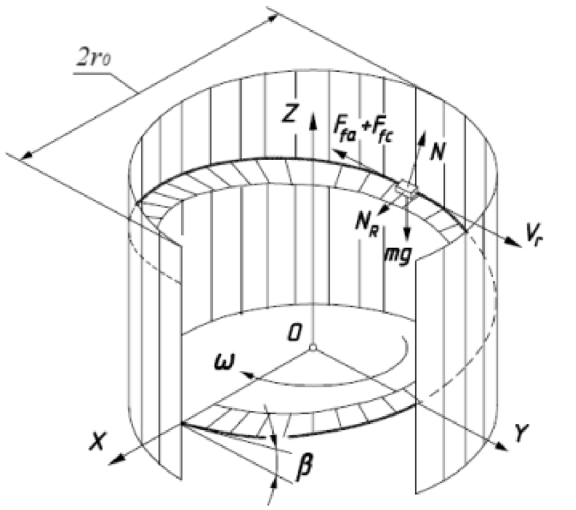


Рис. 3.49. Циліндрична поверхня із криволінійною лопаткою у вигляді смуги гвинтового коноїда

За відсутності обертання поверхонь частинка може рухатися вниз під дією сили власної ваги. Запишемо параметричні рівняння гвинтової лінії, напрям побудови якої відповідає напряму спуску частинки:

$$x = r_0 \cos\alpha;$$
$$y = r_0 \sin\alpha; \quad (3.157)$$
$$z = -r_0\alpha \, \mathrm{tg}\beta,$$

де r_0 = const – радіус обмежуючого циліндра, м;

β = const – кут підйому гвинтової лінії, град;

α – кут повороту точки гвинтової лінії навколо її осі (незалежна змінна), град.

При русі частинки по гвинтовій лінії (3.157) виникають сили реакції R і R_R, спрямовані по нормалях до коноїда і циліндра (див. рис. 3.49). Щоб знати напрям цих нормалей, потрібно мати рівняння цих поверхонь.

Параметричні рівняння шнека мають вигляд:

$$X = (r_0 - u)\cos\alpha;$$
$$Y = (r_0 - u)\sin\alpha; \quad (3.158)$$
$$Z = -r_0\alpha\,\mathrm{tg}\beta,$$

де u –довжина прямолінійної твірної шнека – друга незалежна змінна поверхні.

Відлік довжини твірної починається від гвинтової лінії. При $u=0$ отримаємо параметричні рівняння гвинтової лінії (3.157).

Вертикальний шнек обертається навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω. Частинка знаходиться на гвинтовій лінії (3.157) і одночасно перебуває в контакті із рухомими поверхнями шнека і циліндра (див. рис. 3.49). До неї прикладені наступні сили: сила ваги mg, реакція R коноїда, спрямована вздовж нормалі до його поверхні, реакція R_R, спрямована вздовж нормалі до поверхні циліндра та сила тертя F_f (див. рис. 3.49). При $\omega=0$ і при достатній величині кута β частинка ковзає вниз. Тоді сили тертя по поверхні шнека F_{fa} і по поверхні циліндра F_{fc} спрямовані в протилежну сторону напряму ковзання V_R (див. рис. 3.49). Вектори цих сил будуть дотичними до траєкторії відносного руху (гвинтової лінії, по якій ковзає частинка): $F_f=F_{fa}+F_{fc}$.

У рівняннях (3.157) приймемо змінну α залежною від часу t ($\alpha=\alpha(t)$). Рівняння (3.157) стають рівняннями відносного руху.

Шнек із циліндром обертаються навколо своєї осі з кутовою швидкістю ω. За час t вони повернуться на кут $\theta=-\omega t$ і перемістяться по гвинтовій лінії на певну відстань. Напрям обертання шнека з циліндром вибирається так, щоб частинка при ковзанні по гвинтовій лінії могла в абсолютному русі підніматися вгору. Повернемо гвинтову лінію (3.157) навколо осі OZ на кут $\theta=-\omega t$:

$$x_a = r_0\cos\alpha\cos(-\omega t) - r_0\sin\alpha\sin(-\omega t) = r_0\cos(\omega t - \alpha);$$
$$y_a = r_0\cos\alpha\sin(-\omega t) + r_0\sin\alpha\cos(-\omega t) = -r_0\sin(\omega t - \alpha); \quad (3.159)$$
$$z_a = -r_0\alpha\,\mathrm{tg}\beta.$$

Параметричні рівняння (3.159) враховують два повороти: на кут *α=α(t)* у відносному русі і на кут *θ=–ωt* в переносному русі – вони є рівняннями абсолютного руху частинки.

Проекції вектора абсолютної швидкості отримаємо диференціюванням рівнянь (3.159) по часу *t*:

$$\begin{aligned} x_a' &= -r_0(\omega-\alpha')\sin(\omega t-\alpha); \\ y_a' &= -r_0(\omega-\alpha')\cos(\omega t-\alpha); \\ z_a' &= -r_0\alpha'\mathrm{tg}\beta. \end{aligned} \tag{3.160}$$

Проекції абсолютного прискорення *w* частинки отримаємо диференціюванням рівнянь (3.160):

$$\begin{aligned} x_a'' &= r_0\alpha''\sin(\omega t-\alpha)-r_0(\omega-\alpha')^2\cos(\omega t-\alpha); \\ y_a'' &= r_0\alpha''\cos(\omega t-\alpha)+r_0(\omega-\alpha')^2\sin(\omega t-\alpha); \\ z_a'' &= -r_0\alpha''\mathrm{tg}\beta. \end{aligned} \tag{3.161}$$

Щоб розписати векторне рівняння (2.3) в проекціях на осі системи координат *OXYZ*, потрібно визначити напрям дії сил $F_{fa}+F_{fc}$. (див. рис. 3.49). Вони спрямовані в протилежну сторону вектора відносної швидкості V_R. Проекції цього вектора знаходимо диференціюванням рівнянь (3.157):

$$\begin{aligned} x' &= -r_0\alpha'\sin\alpha; \\ y' &= r_0\alpha'\cos\alpha; \\ z' &= -r_0\alpha'\mathrm{tg}\beta. \end{aligned} \tag{3.162}$$

Знаходимо величину відносної швидкості V_R руху частинки:

$$V_R = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \frac{r_0 \alpha'}{\cos\beta}. \tag{3.163}$$

Проекції одиничного напрямного вектора відносної швидкості знайдемо діленням проекцій (3.162) цієї швидкості на її абсолютну величину (3.163):

$$\begin{aligned} V_{Rx} &= -\cos\beta \sin\alpha; \\ V_{Ry} &= \cos\beta \cos\alpha; \\ V_{Rz} &= -\sin\beta. \end{aligned} \tag{3.164}$$

Проекції вектора (3.164) записані без врахування обертального руху гвинтової лінії. Усі сили мають бути спроєктовані на нерухому систему координат *OXYZ*. Для того, щоб сила $F_{fa}+F_{fc}$ була прикладена в точці знаходження частинки, проекції (3.164) потрібно повернути на кут ($-\omega t$) навколо осі *Oz*. Після цього вони набувають вигляду:

$$[\cos\beta \sin(\omega t - \alpha); \quad \cos\beta \cos(\omega t - \alpha); \quad -\sin\beta]. \tag{3.165}$$

Знайдемо напрям дії сил реакції поверхонь шнека і циліндра.

Вектори, дотичні до координатних ліній гвинтової поверхні, є частинними похідними рівнянь (3.158):

$$\begin{aligned} &X_\alpha = -(r_0 - u)\sin\alpha; \quad Y_\alpha = (r_0 - u)\cos\alpha; \quad Z_\alpha = -r_0 \mathrm{tg}\beta; \\ &X_u = -\cos\alpha; \qquad Y_u = -\sin\alpha; \qquad Z_u = 0. \end{aligned} \tag{3.166}$$

Векторний добуток векторів (3.166) задає нормаль до гвинтової поверхні і має вигляд:

$$[r_0 \,\mathrm{tg}\beta \sin\alpha; \quad r_0 \,\mathrm{tg}\beta \cos\alpha; \quad r_0 - u]. \tag{3.167}$$

Вектор нормалі (3.167) не є одиничним. Його положення на поверхні визначається двома внутрішніми координатами: u і α. Потрібно знати нормаль до поверхні шнека на гвинтовій лінії в місці знаходження частинки (при $u=0$). Підставимо у вираз вектора (3.167) $u=0$ і приведемо його до одиничного:

$$[-\sin\beta\,\sin\alpha;\quad \sin\beta\,\cos\alpha;\quad \cos\beta]. \tag{3.168}$$

Аналогічно знайдемо нормаль до циліндричного кожуха, проекції якої визначаються значно простіше. Нормаль до циліндра паралельна горизонтальній площині і спрямована до його осі (див. рис. 3.49). Отримуємо:

$$[-\cos\alpha;\quad -\sin\alpha;\quad 0]. \tag{3.169}$$

При повороті на кут ($-\omega t$) одиничні вектори (3.168), (3.169) набувають вигляду:

– одиничний вектор нормалі до поверхні шнека в точці розташування частинки:

$$[\sin\beta\,\sin(\omega t-\alpha);\quad \sin\beta\,\cos(\omega t-\alpha);\quad \cos\beta]. \tag{3.170}$$

– одиничний вектор нормалі до циліндричного кожуха (3.169):

$$[-\cos(\omega t-\alpha);\quad \sin(\omega t-\alpha);\quad 0]. \tag{3.171}$$

Напрями дії прикладених сил визначені: для сили тертя $F_{fa}+F_{fc}$ – одиничним вектором (3.164), взятим із протилежним знаком; реакцій поверхонь шнека R і циліндричного кожуха R_R – одиничними векторами (3.170) і (3.171) відповідно. Сила ваги частинки mg спрямована вниз, а отже її одиничний вектор задається проекціями:

$$[0;\quad 0;\quad -1]. \tag{3.172}$$

Величина сил тертя F_{fa} і F_{fc} визначається через величину реакції поверхні і відповідний коефіцієнт тертя: $F_{fa}=fR$, $F_{fc}=f_R R_R$, де f і f_R – коефіцієнти тертя частинки по поверхні шнека і циліндричного кожуха відповідно. Отже, сила тертя дорівнює: $F_f=F_{fa}+F_{fc}=f_R R_R+ fR$.

Розпишемо векторне рівняння (2.3) в проекціях на осі системи координат $OXYZ$ із врахуванням напрямів (3.165), (3.170), (3.161), (3.172) і діючих відповідних сил $F_f=f_R R_R+ fR$, R, R_R та сили ваги mg:

$$\begin{gathered} mx''_a = -(f_R R_R + fR)\cos\beta\,\sin(\omega t - \alpha) + \\ +R\,\sin\beta\,\sin(\omega t - \alpha) - R_R\cos(\omega t - \alpha); \\ my''_a = -(f_R R_R + fR)\cos\beta\,\cos(\omega t - \alpha) + \\ +R\,\sin\beta\,\cos(\omega t - \alpha) + R_R\sin(\omega t - \alpha); \\ mz''_a = (f_R R_R + fR)\sin\beta + R\cos\beta - mg. \end{gathered} \tag{3.173}$$

Підставимо в (3.173) вирази абсолютного прискорення із (3.161) і отримаємо систему трьох диференціальних рівнянь із трьома невідомими функціями: $\alpha=\alpha(t)$, $R=R(t)$ і $R_R=R_R(t)$. Розв'яжемо її відносно α'', R, R_R:

$$\alpha'' = \frac{g\,\cos\beta}{r_0}\,(\sin\beta - f\cos\beta) - f_R(\omega - \alpha')^2\cos\beta. \tag{3.174}$$

$$R = m\,\cos\beta. \tag{3.175}$$

$$R_R = mr_0(\omega - \alpha')^2. \tag{3.176}$$

Диференціальне рівняння (3.174) не залежить від (3.175) і (3.176), тому може бути розв'язане окремо, після чого можна знайти реакції (3.175) і (3.176). Рівняння (3.174) має аналітичний розв'язок, проте і без розв'язку можна зробити деякі важливі висновки на основі його якісного аналізу. Можна припустити, що з часом рух частинки стабілізується – кутова швидкість ковзання α' буде сталою, а прискорення $\alpha''=0$. Підставляємо у (3.174) $\alpha''=0$ і після розв'язання відносно α' отримаємо:

$$\alpha' = \omega \pm \sqrt{\frac{g}{r_0 f_R}(\sin\beta - f\cos\beta)}. \qquad (3.177)$$

Якщо поверхні є нерухомими ($\omega=0$), то ковзання частинки можливе при умові, що підкореневий вираз більший нуля. Він стає рівним нулеві при f=tgβ. Це означає, що кут підйому гвинтової лінії рівний кутові тертя частинки по поверхні коноїда. При кутові β, меншому від кута тертя, частинка не ковзає по поверхнях як нерухомих, так і рухомих. При обертанні поверхонь з кутовою швидкістю ω вона притискається під дією відцентрової сили до циліндра і обертається разом із ним («залипає»). Переломний момент наступає, коли кут β стає більшим за кут тертя. У цьому випадку частинка буде рухатися по нерухомих поверхнях вниз з кутовою швидкістю, величина якої визначається коренем квадратним виразу (3.177).

Якщо поверхням надати кутової швидкості ω, то кутова швидкість відносного руху α' частинки буде визначатися формулою (3.177) зі знаком «–» перед коренем (різницею між кутовою швидкістю обертання поверхонь і кутовою швидкістю ковзання частинки по нерухомих поверхнях). Позначимо $\omega_0 = \sqrt{\frac{g(\sin\beta - f\cos\beta)}{r_0 f_R}}$ і запишемо: $\alpha' = \omega - \omega_0$, де ω_o – швидкість ковзання частинки по нерухомих поверхнях. При $\omega<\omega_o$ α' матиме від'ємне значення і частинка спускатиметься вниз. По мірі збільшення кутової швидкості ω обертання поверхонь швидкість опускання буде зменшуватися. Коли кутові швидкості стануть рівними ($\omega=\omega_o$), частинка «зависне». При подальшому зростанні кутової швидкості ω (при $\omega>\omega_o$) частинка буде підніматися, причому швидкість підйому буде прямо пропорційна різниці $\omega–\omega_o$.

Отже, транспортування частинки вгору неможливе за трьох умов:

1) кут β підйому гвинтової лінії менший кута тертя – частинка «залипає» (справедливо і для стаціонарної поверхні);

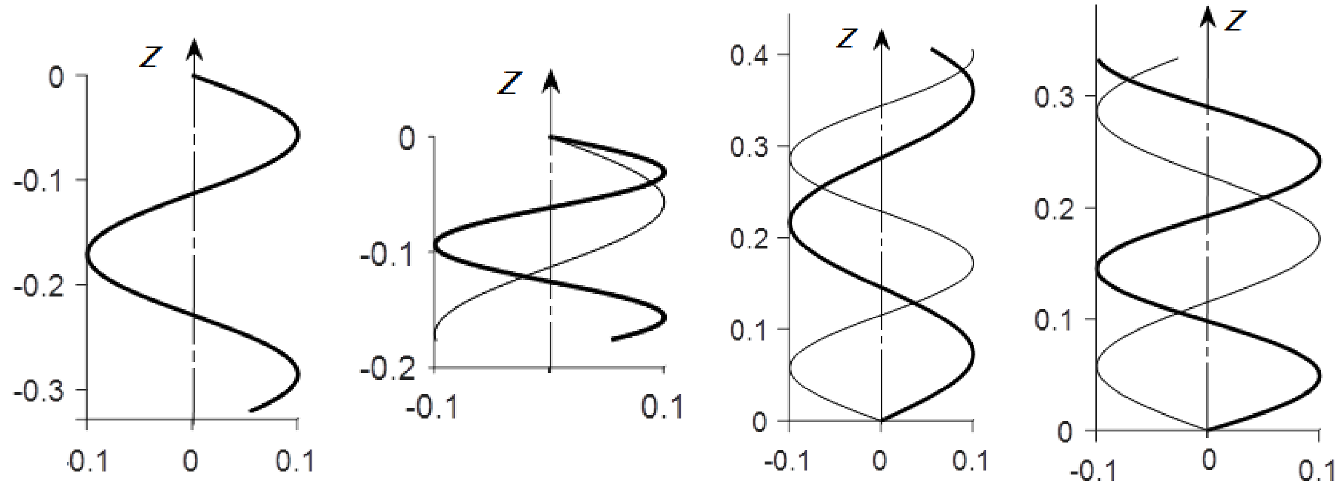
2) кут β більший кута тертя, $\omega<\omega_o$ – частинка опускається;

3) кут β більший кута тертя, $\omega=\omega_o$ – частинка «зависає» (кутові швидкості обертання поверхонь і ковзання частинки рівні по величині і протилежні за знаком і абсолютна швидкість обертання дорівнює нулю).

Звернемо увагу на деякі відмінності руху частинки по похилій площині і по описаних поверхнях, коли f=tgβ – кут нахилу площини і кут підйому гвинтової лінії дорівнюють кутові тертя. У такому випадку частинка буде рухатися по площині зі сталою швидкістю V_R, величина якої задається на початку руху. На нерухомих поверхнях частинка рухатися не буде, оскільки виникає відцентрова сила, яка спричинює появу сили тертя. Однак якщо поверхню циліндра зробити абсолютно гладенькою (f_R=0), то відповідно до диференціального рівняння (3.174) рух частинки по поверхнях можливий із заданою сталою швидкістю V_R. Якщо $f_R \neq 0$, частинка на нерухомій поверхні залишатиметься у спокої, а якщо надати їй початкової швидкості V_R, з часом вона зупиниться. Якщо ж надати поверхням кутової швидкості обертання ω, частинка може бути або в режимі «залипання» або в режимі «зависання». Режим «залипання» відповідає початковій швидкості V_R=0. Режим «зависання» відповідає такій початковій швидкості V_R, яка забезпечить кутову швидкість ковзання частинки, рівну кутовій швидкості обертання поверхонь. Тоді абсолютна кутова швидкість обертання частинки дорівнює нулю і відповідно до (3.176) реакція R_R циліндра відсутня, отже відсутня і відповідна сила тертя в рівнянні (3.174).

Як уже зазначалося, випадок $\omega=\omega_o$ є граничним між опусканням і підйомом частинки: при $\omega<\omega_o$ частинка опускається, при $\omega>\omega_o$ – піднімається. При $\omega=\omega_o$ висота розташування частинки не змінюється, причому вона може бути як в режимі «залипання», так і в режимі «зависання».

За рівняннями (3.157) і (3.159) побудуємо відносну і абсолютну траєкторії руху частинки. Нехай коефіцієнт тертя f=0,3. Йому відповідає кут тертя β=arctg$f$=16,7°. Для того, щоб не було «залипання», кут підйому гвинтової лінії повинен бути більше за кут тертя. Приймемо β=20°. При r_0=0,1 *м*, f_R=0,3 знаходимо: $\omega_0 = \sqrt{\frac{g(\sin\beta - f\cos\beta)}{r_0 f_R}} = 4{,}43\text{с}^{-1}$. Це кутова швидкість опускання частинки по нерухомих поверхнях ($\omega=0$). Відносна і абсолютна траєкторії збігаються (див. рис. 3.50,а).



а) б) в) г)

Рис. 3.50. Абсолютна (потовщена лінія) і відносна траєкторії руху частинки протягом 2 *с* по поверхнях з наступними параметрами: r_0=0,1 *м*, β=20°, f=0,3:

а) f_R=0,3, ω=0;

б) f_R=0,3, ω=2 c^{-1};

в) f_R=0,3, ω=10 c^{-1};

г) f_R=0,2, ω=10 c^{-1}

На рис. 3.50,б побудовано відносну і абсолютну траєкторії при ω=2 c^{-1}. Частинка опускається вниз, але швидкість опускання є меншою за попередній випадок. При $\omega=\omega_o$ руху частинки у вертикальному напрямі взагалі не буде. На рис. 3.50,в побудовано відносну і абсолютну траєкторії при ω=10 c^{-1}. Частинка піднімається вгору, причому зі збільшенням ω швидкість підйому пропорційно зростає. На рис. 3.50,г побудовано відносну і абсолютну траєкторії при попередніх параметрах і зменшеному коефіцієнтові тертя f_R=0,2. Швидкість підйому частинки зменшилася, оскільки змінилося значення ω_o. При подальшому зменшенні f_R підйом може змінитися на спуск, а при f_R=0 частинка буде опускатися вниз рівноприскорено.

Реакції поверхні шнека (3.175) і циліндра (3.176) є сталими. Підставивши в (3.176) $\alpha'=\omega-\omega_o$ отримаємо: $R_R = mr_0\omega_0^2$. Отже, величина реакції циліндра не залежить від кутової швидкості його обертання, а визначається кутовою швидкістю ковзання частинки по нерухомих поверхнях.

3.3.3. Рух частинки по гвинтовому коноїду в нерухомому циліндрі

Гвинтові транспортери (конвеєри) [15, 31, 37, 57, 73, 74, 76, 92, 95, 96, 103, 106, 116, 150, 151, 154, 155, 195] широко використовуються для переміщення сипких матеріалів вертикально вгору, в горизонтальному напрямі, а також під кутом до горизонтального напряму [22, 28, 71]. Вони знаходять своє застосування в роторних снігоочисниках, зернозбиральних комбайнах, льодорубах, машинах лиття під тиском, сміттєвозах, у виробництві висівок і пластівців, при транспортуванні шламу на нафтових родовищах, для подачі палива у піч тощо.

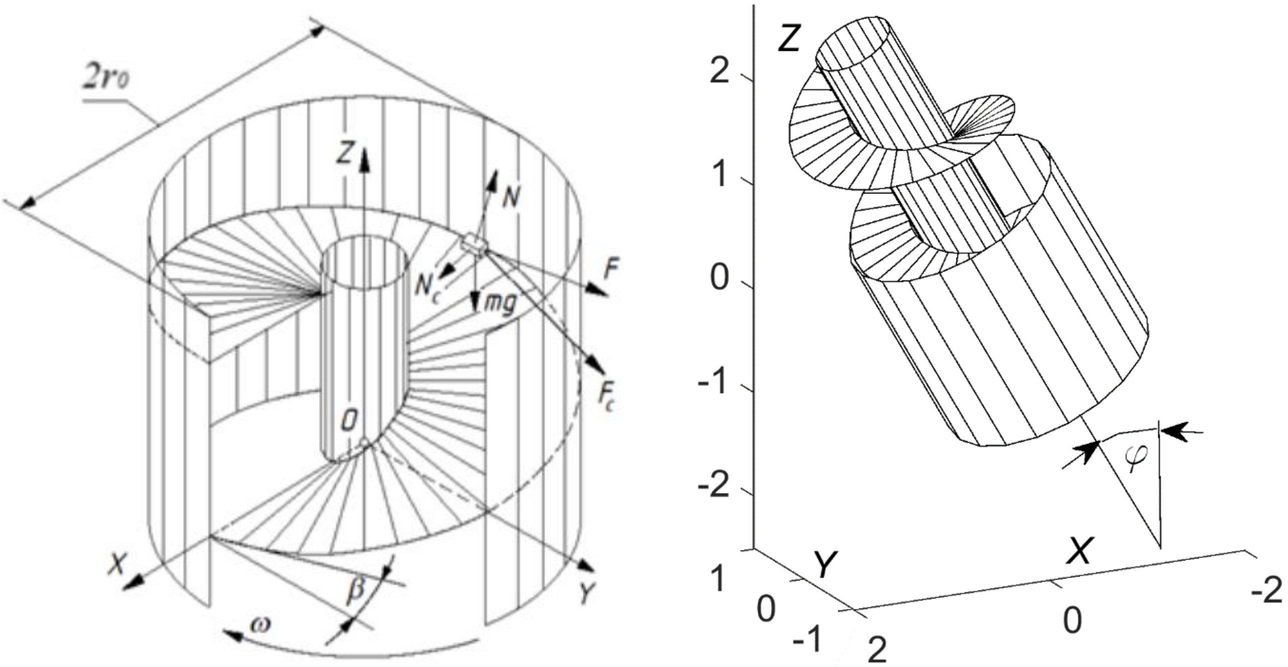
Вивченими є процеси, які відбуваються при переміщенні окремої частинки шнековим транспортером у вертикальному [30, 46, 47, 49, 88, 119, 138, 179, 185, 187, 194, 301] і горизонтальному [39, 136, 137, 191, 263, 313] напрямах. Між ними є суттєва різниця: якщо для транспортування у вертикальному напрямі потрібно забезпечити необхідні умови, зокрема, достатню кутову швидкість обертання шнека, то при горизонтальному транспортуванні переміщення частинки відбувається при будь-якій кутовій швидкості обертання шнека. Отже, при зміні нахилу осі шнека наступає момент, коли транспортування стає можливим, тоді як воно було неможливим у вертикальному напрямі.

Розглянемо рух частинки за умови, що вона одночасно контактує із двома поверхнями: рухомою поверхнею шнека і нерухомою поверхнею циліндричного кожуха, у якому обертається шнек (див. рис. 3.51). Їх спільною лінією, по якій ковзає частинка, є гвинтова лінія – периферія шнека. Частинка ковзає по гвинтовій лінії шнека, який обертається, тобто по відношенню до нього вона перебуває у відносному русі. Одночасно вона ковзає і по поверхні кожуха, по відношенню до якого вона перебуває у абсолютному русі. Траєкторією абсолютного руху частинки є її слід ковзання на поверхні кожуха.

Робочою поверхнею шнека є його відсік між двома співвісними циліндрами, причому внутрішній циліндр може відігравати роль валу. Крайками шнека є гвинтові лінії однакового кроку, але з різним кутом підйому. Важливим є кут підйому зовнішньої крайки шнека – гвинтової лінії, яка є лінією перетину шнека із циліндричним кожухом.

Повернемо абсолютну траєкторію (3.159) навколо осі *OY* на кут φ:

$$x_{\alpha\varphi} = z_\alpha \sin\varphi + x_\alpha \cos\varphi = r_0 \alpha \operatorname{tg}\beta \sin\varphi + r_0 \cos(\omega t - \alpha)\cos\varphi\,;$$
$$y_{\alpha\varphi} = -r_0 \sin(\omega t - \alpha)\,; \qquad (3.178)$$
$$z_{\alpha\varphi} = z_\alpha \cos\varphi - x_\alpha \sin\varphi = r_0 \alpha \operatorname{tg}\beta \cos\varphi - r_0 \cos(\omega t - \alpha)\sin\varphi.$$



а) б)

Рис. 3.51. Шнек у циліндричному кожусі:

а) з вертикальною віссю і схемою прикладених до частики сил;

б) з поворотом на кут φ навколо осі *OY*, відлік якого починається від осі *OZ*

Аналогічно повернемо на кут φ вектор абсолютного прискорення:

$$x''_{\alpha\varphi} = r_0 \alpha''[\operatorname{tg}\beta \sin\varphi + \sin(\omega t - \alpha)\cos\varphi] -$$
$$-r_0(\omega - \alpha')^2 \cos(\omega t - \alpha)\cos\varphi\,; \qquad (3.179)$$
$$y''_{\alpha\varphi} = r_0 \alpha'' \cos(\omega t - \alpha) + r_0(\omega - \alpha')^2 \sin(\omega t - \alpha);$$

$$z''_{\alpha\varphi} = r_0\alpha''[\operatorname{tg}\beta\cos\varphi - \sin(\omega t - \alpha)\sin\varphi] +$$
$$+ r_0(\omega - \alpha')^2\cos(\omega t - \alpha)\sin\varphi.$$

Рівняння (3.179) є проекціями на осі координат вектора $\bar{a}$ – лівої частини векторного рівняння (2.3). Знайдемо проекції векторів прикладених сил, повернутих на кут φ (окрім сили ваги), які входять до правої частини векторного рівняння. Після повороту на кут φ вони набувають вигляду:

– проекції одиничного вектора нормалі N до поверхні шнека:

$$\begin{gathered} N_x = \cos\beta\sin\varphi - \sin\beta\cos\varphi\sin(\omega t - \alpha)\,; \\ N_y = -\sin\beta\cos(\omega t - \alpha)\,; \\ N_z = \cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi\sin(\omega t - \alpha). \end{gathered} \tag{3.180}$$

– проекції одиничного вектора нормалі N_c до поверхні кожуха:

$$\begin{gathered} N_{cx} = -\cos\varphi\cos(\omega t - \alpha)\,; \\ N_{cy} = \sin(\omega t - \alpha)\,; \\ N_{cz} = \sin\varphi\cos(\omega t - \alpha). \end{gathered} \tag{3.181}$$

– проекції одиничного вектора V_r відносної швидкості частинки:

$$\begin{gathered} V_{rx} = \sin\beta\sin\varphi + \cos\beta\cos\varphi\sin(\omega t - \alpha)\,; \\ V_{ry} = \cos\beta\cos(\omega t - \alpha)\,; \\ V_{rz} = \sin\beta\cos\varphi - \cos\beta\sin\varphi\sin(\omega t - \alpha). \end{gathered} \tag{3.182}$$

– проекції одиничного вектора V_a абсолютної швидкості частинки:

$$V_{ax}=\frac{\alpha'\sin\beta\sin\varphi-(\omega-\alpha')\cos\beta\cos\varphi\sin(\omega t-\alpha)}{\sqrt{\omega(\omega-2\alpha')\cos^2\beta+\alpha'^2}};$$
$$V_{ay}=-\frac{(\omega-\alpha')\cos\beta\cos(\omega t-\alpha)}{\sqrt{\omega(\omega-2\alpha')\cos^2\beta+\alpha'^2}}; \qquad (3.183)$$
$$V_{az}=\frac{\alpha'\sin\beta\cos\varphi+(\omega-\alpha')\cos\beta\sin\varphi\sin(\omega t-\alpha)}{\sqrt{\omega(\omega-2\alpha')\cos^2\beta+\alpha'^2}}.$$

– проекції одиничного вектора ваги частинки, напрям якого не залежить від кута φ:

$$[0; \qquad 0; \qquad -1]. \qquad (3.184)$$

Розпишемо векторне рівняння (2.3) в проекціях на осі системи координат *OXYZ*:

$$mx''_{\alpha\varphi}=RR_x+R_cR_{cx}-fRV_{rx}-f_cR_cV_{ax};$$
$$my''_{\alpha\varphi}=RR_y+R_cR_{cy}-fRV_{ry}-f_cR_cV_{ay}; \qquad (3.185)$$
$$mz''_{\alpha\varphi}=RR_z+R_cR_{cz}-fRV_{rz}-f_cR_cV_{az}-mg.$$

В рівняннях (3.185) R і R_c – скалярні величини (величини сил реакцій поверхні шнека і кожуха відповідно), а такі ж позначення з додатковими індексами осей – проекції одиничних векторів, вздовж яких спрямовані ці сили. Якщо підставити в (3.185) всі вирази, наведені вище, включаючи підрозділ 3.3.2, отримаємо нелінійну систему трьох диференціальних рівнянь із трьома невідомими функціями: $\alpha=\alpha(t)$, $R=R(t)$ і $R_c=R_c(t)$:

$$\alpha''=\frac{g\cos\beta}{r_0}[(\cos\beta-f\sin\beta)\sin\varphi\sin(\omega t-\alpha)-$$
$$-(f\cos\beta+\sin\beta)\cos\varphi]+\frac{f_c\cos\beta\,(\omega-2\alpha'+\omega\cos 2\beta-f\omega\sin 2\beta)}{2r_0\sqrt{\omega(\omega-2\alpha')\cos^2\beta+\alpha'^2}}\times \qquad (3.186)$$
$$\times[r_0(\omega-\alpha')^2+g\sin\varphi\cos(\omega t-\alpha)].$$

$$R = mg[\cos\beta\cos\varphi + \sin\beta\sin\varphi\sin(\omega t - \alpha)] +$$
$$+\frac{mf_c\omega\sin\beta\cos\beta}{r_0\sqrt{\omega(\omega - 2\alpha')\cos^2\beta + \alpha'^2}}[r_0(\omega - \alpha')^2 + g\sin\varphi\cos(\omega t - \alpha)]. \tag{3.187}$$

$$R_c = mr_0(\omega - \alpha')^2 + mg\sin\varphi\cos(\omega t - \alpha). \tag{3.188}$$

Диференціальне рівняння (3.186) може бути розв'язане самостійно за допомогою чисельних методів. Після знаходження розв'язку у вигляді $\alpha=\alpha(t)$ можна визначити реакцію шнека (3.187) і циліндричного кожуха (3.188).

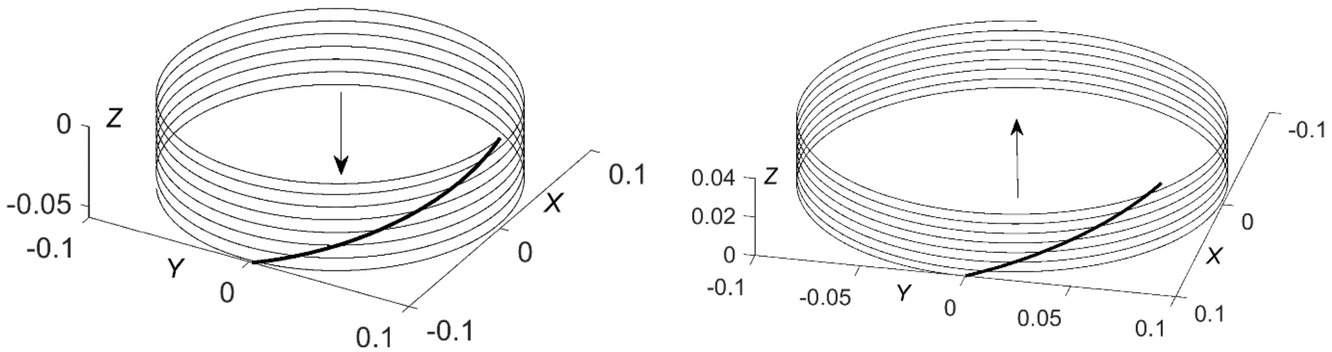
При $\varphi=0$ отримані рівняння (3.186), (3.187), (3.188) описують процес переміщення частинки вертикальним шнеком. Рівняння (3.187) і (3.188) до уваги можна не брати, оскільки диференціальне рівняння (3.186) повністю описує рух частинки. При $\varphi=0$ воно набуває спрощеного вигляду:

$$\alpha'' = f_R(\omega - \alpha')^2\cos\beta\frac{\omega\cos\beta(\cos\beta - f\sin\beta) - \alpha'}{\sqrt{\omega(\omega - 2\alpha')\cos^2\beta + \alpha'^2}} -$$
$$-\frac{g\cos\beta}{r_0}(f\cos\beta + \sin\beta). \tag{3.189}$$

Прискорення і швидкість α'', α' ковзання частинки по кромці шнека суттєво залежать від величини кутової швидкості ω обертання шнека. При недостатній кутовій швидкості ω частинка не зможе підніматися вгору і навпаки буде ковзати вниз. Отже, існує граничне значення кутової швидкості ω між підйомом і спуском частинки. Його можна знайти теоретично. При граничному значенні ω частинка «залипає» на гвинтовій лінії – кромці шнека і обертається разом із нею. Це означає, що ковзання по гвинтовій лінії відсутнє, а є ковзання по циліндричному кожуху, тобто відносна траєкторія відсутня, а абсолютною є коло на циліндрі. Це відбувається за умови, коли $\alpha'' = \alpha' = 0$. Підставимо ці значення у рівняння (3.189) і розв'яжемо його відносно ω:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{f_c r_0} \times \frac{f\cos\beta + \sin\beta}{\cos\beta - f\sin\beta}}. \quad (3.190)$$

Гвинтові конвеєри використовуються для транспортування у горизонтальному (зазвичай на відстань до *60 м*), вертикальному (до *15 м*) чи похилому напрямках сипких, дрібнокускових, пилоподібних чи порошкових матеріалів з продуктивністю до *150 т/год*. Діаметр шнека при цьому становить *0,1…0,6 м*, а частота обертання *10…120* $хв^{-1}$ (*0,2…21* $с^{-1}$). Наприклад, при $f=f_c=0{,}3$, $r_0=0{,}1$ *м*, $\beta=20°$ відповідно до (3.190) отримаємо: $\omega_o=15{,}6$ $с^{-1}$. В результаті чисельного інтегрування на рис. 3.52 побудовані відносна (потовщена лінія) і абсолютна (тонка лінія) траєкторії руху частинки при $\omega<\omega_o$ (див. рис. 3.52,а) і $\omega>\omega_o$ (див. рис. 3.52,б).

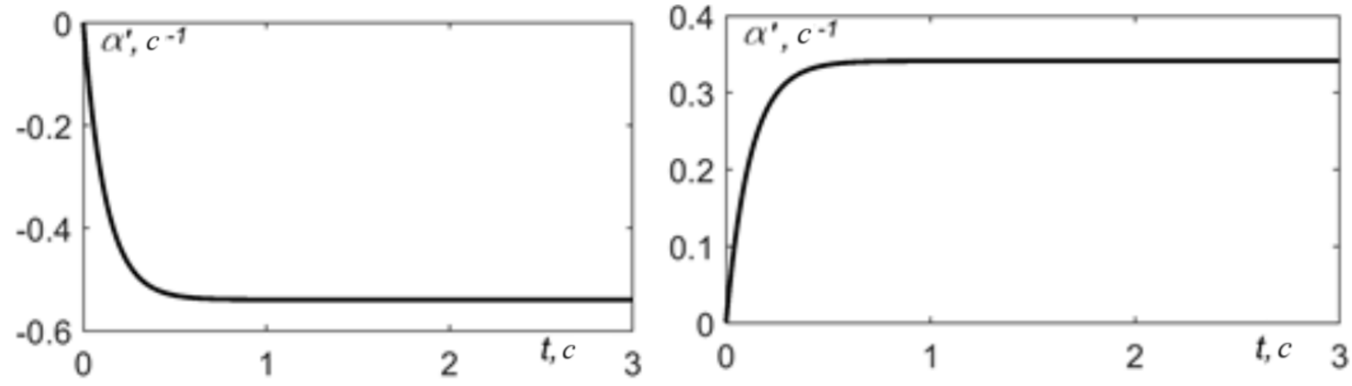


а) б)

Рис. 3.52. Відносна (потовщена лінія) і абсолютна (тонка лінія) траєкторії руху частинки при $f=f_c=0{,}3$, $r_0=0{,}1$ *м*, $\beta=20°$ протягом *3 с*:
а) $\omega=15$ $с^{-1}$ (частинка опускається);
б) $\omega=16$ $с^{-1}$ (частинка піднімається)

Після перехідного періоду кутова швидкість обертання частинки при її ковзанні по гвинтовій лінії стає сталою ($\alpha' = const$), що для обох випадків (див. рис. 3.52) показано на рис. 3.53.

Після стабілізації руху обидві траєкторії (відносна і абсолютна) стають гвинтовими лініями сталого кроку.



а) б)

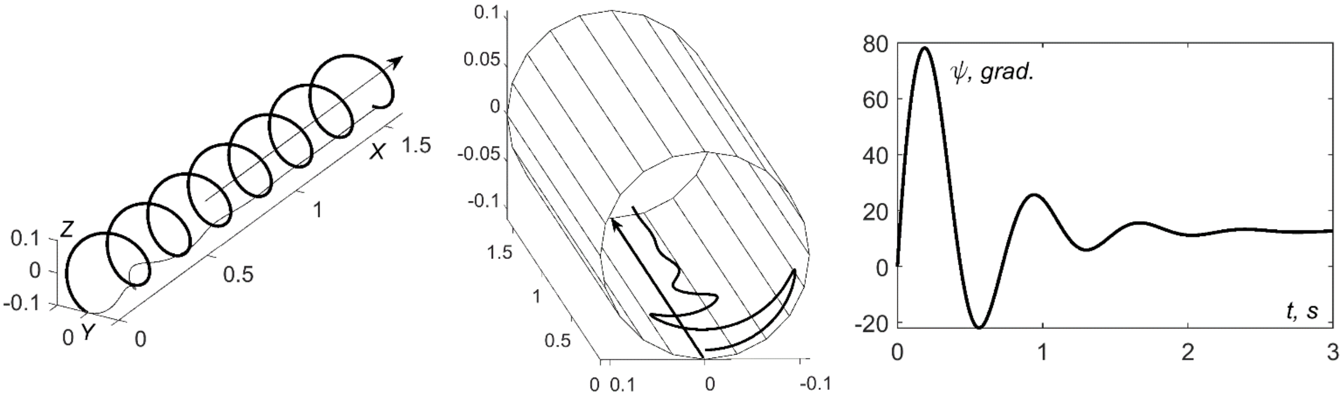
Рис. 3.53. Графіки зміни кутової швидкості α' при опусканні і підйомі частинки

При $\varphi=90°$ рівняння (3.186) – (3.188) описують процес переміщення частинки горизонтальним шнеком. Запишемо тільки одне рівняння, розв'язок якого чисельними методами дає можливість знайти залежність $\alpha=\alpha(t)$:

$$\alpha'' = \frac{g\cos\beta}{r_0}(\cos\beta - f\sin\beta)\sin(\omega t-\alpha) + \\ + \frac{f_R\cos\beta\,(\omega - 2\alpha' + \omega\cos 2\beta - f\omega\sin 2\beta)}{2r_0\sqrt{\omega(\omega-2\alpha')\cos^2\beta + \alpha'^2}}\left[r_0(\omega-\alpha')^2 + g\cos(\omega t - \alpha)\right]. \quad (3.191)$$

При горизонтальній осі поверхні частинка рухається в нижній частині кожуха при будь-яких кутових швидкостях обертання шнека. Відносною траєкторією є гвинтова лінія, а абсолютною – лінія, яка після стабілізації збігається з прямолінійною твірною циліндра (див. рис. 3.54,а).

На рис. 3.54,б стрілкою показаний напрям переміщення частинки, причому стрілка збігається з нижньою твірною циліндра. Абсолютна траєкторія з часом наближається до прямої лінії, яка відхилена від нижньої твірної на певний кут відносно осі обертання. Рис. 3.54,в демонструє, що це відхилення після стабілізації руху складає 18°. При $f_c=0$ відхилення не буде і частинка рухатиметься по нижній твірній.



а) б) в)

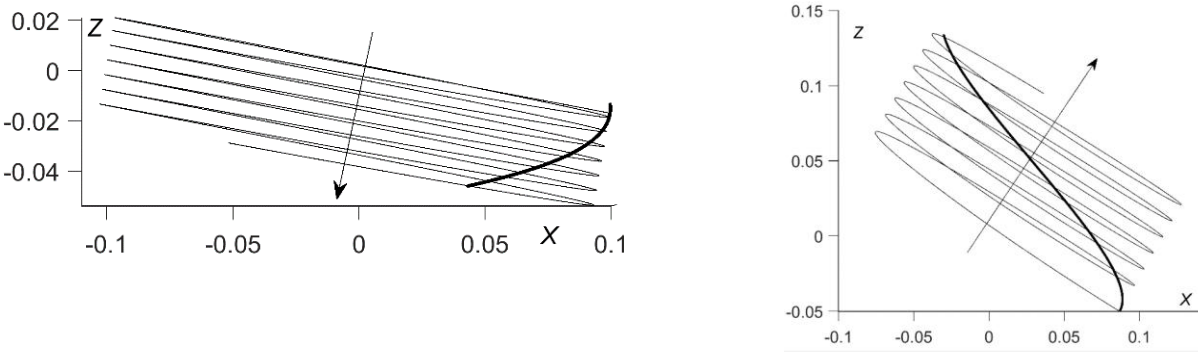
Рис. 3.54. Графічні ілюстрації до руху частинки з горизонтальною віссю розташування шнека при $\beta=20°$, $f=f_c=0{,}3$, $r_0=0{,}1$ *м*, $\omega=15$ c^{-1}:

а) відносна і абсолютна траєкторії;

б) абсолютна траєкторія на поверхні кожуха;

в) графік відхилення абсолютної траєкторії від нижньої твірної циліндричного кожуха у кутовому вимірі

Якщо порівняти переміщення окремої частинки вертикальним і горизонтальним шнеками, то між цими процесами існує суттєва різниця. По-перше, для переміщення частинки вгору вертикальним шнеком має бути забезпечена належна кутова швидкість його обертання, тоді як для горизонтального шнека така вимога відсутня. По-друге, абсолютною траєкторією переміщення частинки вертикальним шнеком є гвинтова лінія, тоді як для горизонтального шнека – пряма. Очевидно, що ці відмінні між собою процеси повинні переходити один в одного по мірі зміни кута нахилу φ від $0°$ (вертикальний шнек) до $90°$ (горизонтальний шнек). На рис. 3.52,а показано, що при $\omega=15$ c^{-1} частинка опускається вниз. При цій же кутовій швидкості і інших незмінних параметрах нахилятимемо шнек. На рис. 3.55 зображено відносну і абсолютну траєкторії руху частинки для різних кутів φ нахилу шнека.



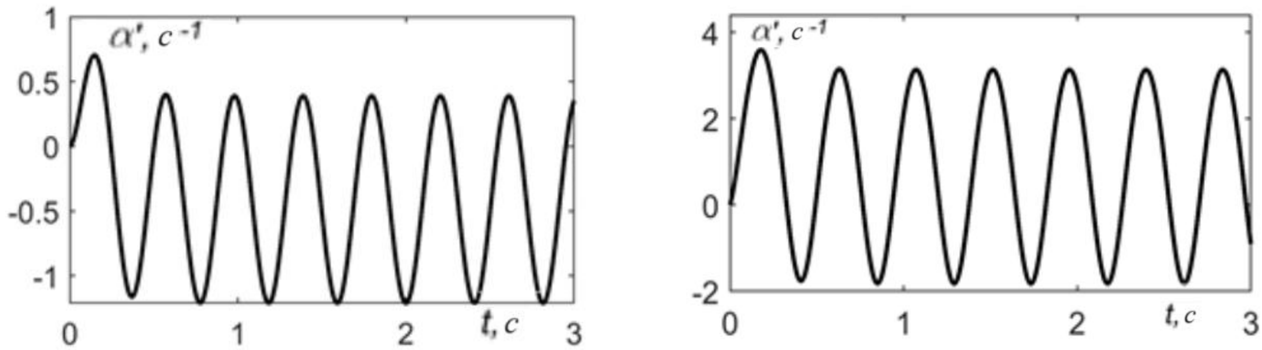
а) б)

Рис. 3.55. Абсолютна (тонка лінія) і відносна (потовщена лінія) траєкторії руху частинки при $\beta=20°$, $f=f_c=0{,}3$, $r_0=0{,}1$ *м*, $\omega=15$ c^{-1} і різних кутах нахилу шнека:

а) кут нахилу $\varphi=10°$;

б) кут нахилу $\varphi=30°$

У першому випадку (див. рис. 3.55,а) частинка рухається вниз, а у другому (див. рис. 3.55,б) – піднімається вгору. На рис. 3.56 для цих випадків побудовано графіки кутових швидкостей ковзання частинки по периферії шнека.



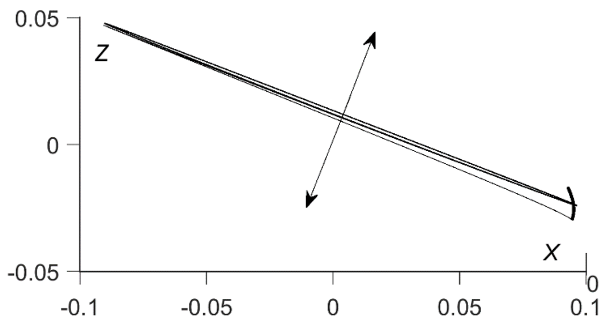
а) б)

Рис. 3.56. Графіки зміни кутової швидкості ковзання частинки протягом 3 *с* при $\beta=20°$, $f=f_c=0{,}3$, $r_0=0{,}1$ *м*, $\omega=15$ c^{-1} і різних кутах нахилу шнека:

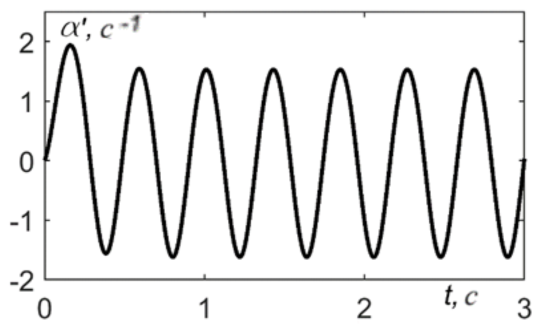
а) кут нахилу $\varphi=10°$;

б) кут нахилу $\varphi=30°$

Для цих двох випадків характерною відмінністю в порівнянні із вертикальним шнеком є графіки кутової швидкості ковзання частинки. При вертикальному шнеку кутова швидкість ковзання після стабілізації руху стає сталою як при русі частинки вниз, так і вгору (див. рис. 3.53). Це означає, що вона ковзає по поверхні шнека зі сталою швидкістю вниз або вгору і стає рівною нулю, коли кутова швидкість стає рівною ω_o відповідно до (3.190). При нахиленому шнеку цього не відбувається. Кутова швидкість ковзання частинки змінює свій напрям, тобто коливається на поверхні шнека в протилежні сторони (див. рис. 3.56). При русі частинки вниз ці коливання відбуваються так, що переважає від'ємна частина (див. рис. 3.56,а), а при русі частинки вгору – навпаки (див. рис. 3.56,б). Очевидно, що існує такий кут нахилу φ, при якому частинка не рухається в жодну зі сторін в напрямі осі. Знайти його аналітичним способом не вдається саме через ці коливання. Його було знайдено завдяки візуалізації траєкторій підбором відповідного значення φ між $\varphi=10°$ і $\varphi=30°$. Такому значенню відповідає $\varphi=19{,}5°$.Тоді абсолютною траєкторією практично є коло на поверхні кожуха, а відносною – малий відрізок гвинтової лінії, на якому частинка здійснює однакові коливання в протилежні сторони (див. рис. 3.57,а). На рис. 3.57,б показано графік коливань кутової швидкості ковзання, з якого видно, що додатна і від'ємна частини є рівними.



а)



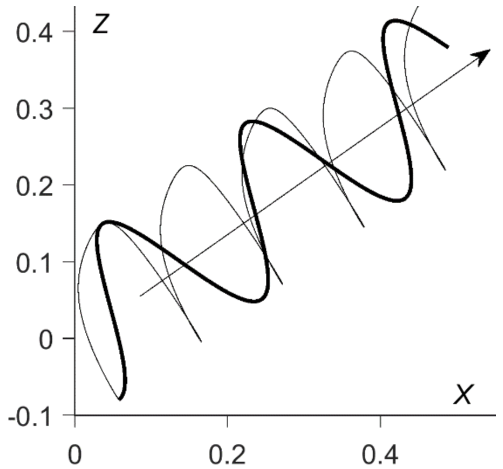
б)

Рис. 3.57. Графічні ілюстрації до випадку, коли частинка не рухається вздовж осі і здійснює невеликі коливання при $\beta=20°$, $f=f_c=0{,}3$, $r_0=0{,}1$ *м*, $\omega=15$ c^{-1} і куті нахилу шнека $\varphi=19{,}5°$:

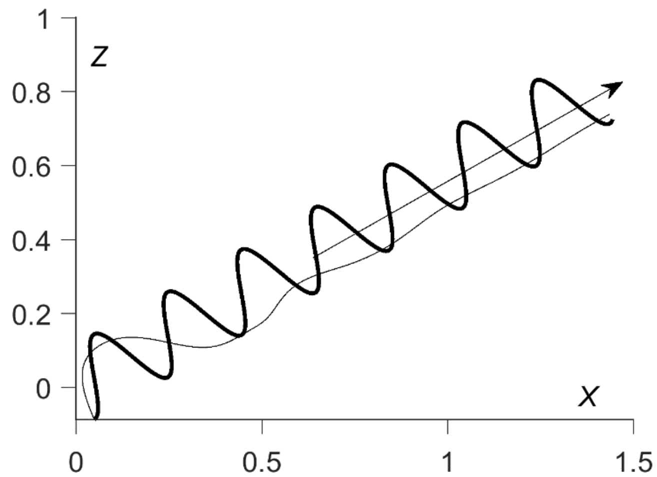
а) абсолютна і відносна траєкторії;

б) графік зміни кутової швидкості ковзання частинки

Таким же чином завдяки візуалізації траєкторій можна знайти значення кута φ, при якому абсолютна траєкторія від гвинтової лінії переходить до прямої. Дослідження показали, що для вказаних раніше параметрів шнека, коефіцієнтів тертя і кутової швидкості обертання шнека це відбувається при $\varphi=57{,}5°$. На рис. 3.58 зображені траєкторії при кутах φ, значення яких небагато відрізняються від $\varphi=57{,}5°$, але знаходяться по різних сторонах від нього. Із рис. 3.58 видно, що відбувається не тільки якісна зміна форми абсолютної траєкторії, але і швидкості транспортування. Рисунки відповідають процесу, який відбувався протягом *3 с*. При переході абсолютної траєкторії до прямої лінії (див. рис. 3.58,б) відстань, яку долає частинка при русі на підйом, указаний стрілкою, зросла більше, як удвічі.



а)



б)

Рис. 3.58. Абсолютна (тонка лінія) і відносна (потовщена лінія) траєкторії руху частинки при $\beta=20°$, $f=f_c=0{,}3$, $r_0=0{,}1$ *м*, $\omega=15$ $с^{-1}$ і різних кутах нахилу шнека:
а) кут нахилу $\varphi=55°$;
б) кут нахилу $\varphi=60°$

Слід зазначити, що на процес переміщення частинки впливають і інші фактори. Зокрема, зменшення коефіцієнта тертя f по поверхні шнека і збільшення коефіцієнта тертя f_c по поверхні кожуха позитивно впливають на її транспортування вгору. Натомість, при $f_c=0$, тобто при абсолютно гладенькій поверхні кожуха, транспортування частинки вгору стає взагалі неможливим при будь-яких значеннях кута φ, окрім кута $\varphi=90°$, коли транспортування відбувається в горизонтальному напрямі.

Отримані рішення закривають проблемну частину досліджень стосовно транспортування частинки шнеком, який обертається у нерухомому кожусі з урахуванням прийнятих припущень. Адже доволі детально вивчено цей процес для двох положень шнека з вертикальним і горизонтальним положенням його осі. Решта процесів з різними кутами його нахилу потребувала досліджень, що і було зроблено внаслідок складання узагальненої моделі переміщення частинки.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 3

1. Отримано закон руху (3.15) частинки по циліндричній поверхні з горизонтальними прямолінійними твірними і поперечним перерізом у вигляді синусоїди, яка здійснює поступальні коливання таким чином, що всі її точки описують кола в горизонтальних площинах.

2. Отримано систему диференціальних рівнянь (3.37) руху частинки по зовнішній поверхні циліндра, який здійснює колові поступальні коливання в горизонтальних площинах.

Встановлено, що частинки з різним коефіцієнтом тертя рухаються по різних траєкторіях, причому відстань між ними збільшується по мірі ковзання по поверхні (див. рис. 3.12). Отриманий результат може бути використано для сепарації матеріалу за його фрикційними властивостями.

3. Виведено систему диференціальних рівнянь (3.46) руху частинки по горизонтальній площині, яка поєднує поступальний і обертальний рухи. Встановлено, що відносний рух частинки на початковому етапі є дещо хаотичним, однак із часом він набуває форми спіралі незалежно від місця попадання частинки на площину.

4. Знайдено аналітичні залежності руху частинки по внутрішній поверхні горизонтального (3.60, 3.61) і похилого (3.69) циліндра при його обертанні навколо власної осі.

Встановлено, що кінематичні характеристики руху частинки залежать від кута нахилу циліндра і кутової швидкості його обертання:

– при $\beta < \operatorname{arctg} f$ відбувається стабілізація руху, коливання припиняються і частинка рухається прямолінійно в осьовому напрямі зі сталою швидкістю;

– при $\beta \geq \operatorname{arctg} f$ стабілізації руху не відбувається, частинка рухається прискорено в осьовому напрямі;

– при досягненні певної величини кутової швидкості обертання циліндра частинка практично «залипає» незалежно від кута нахилу циліндра.

5. Знайдено аналітичні залежності (3.103) руху частинки по внутрішній поверхні сферичного сегмента, який обертається навколо вертикальної осі.

«Залипання» частинки відбувається на меридіані, близькому до екватора сфери. Встановлено, що при початку руху частинки вище полюса сферичного сегмента вона швидше досягає верхньої граничної траєкторії.

6. Знайдено закон (3.117) руху частинки по поверхні обертання із заданим меридіаном зі змінним кутом його підйому, яка обертається навколо власної осі. Розглянуто приклад соковитискача відцентрового типу з меридіаном у формі параболи. З'ясовано, що реакція поверхні є максимальною перед «залипанням» частинок. Встановлено, що незалежно від кутової швидкості обертання сита на висоті, яка відповідає куту підйому меридіану $80°$, необхідно передбачити очисний пристрій або ж забезпечити висоту сита менше цього значення для недопущення його забивання. Запропонований алгоритм є універсальним: в ролі меридіана може бути прийнята інша крива.

7. Знайдено закон (3.152) – (3.154) руху частинки по поверхні відцентрового апарата у вигляді сферичного сегмента з вертикально встановленими лопатками, що забезпечує початок польоту частинки в момент сходження з диска під заданим кутом до горизонтальної площини. Запропоновано три конструкції сферичного розсіювального апарата, на які отримано патенти України на корисну модель.

8. Сформульовано умови неможливості транспортування матеріалу вертикальним шнеком, обмеженим співвісним циліндром, які складають єдине ціле і які здійснюють обертальний рух:

– $\beta < \mathrm{arctg}\, f$ – частинка «залипає» (справедливо і для стаціонарної поверхні);

– $\beta > \mathrm{arctg}\, f$, $\omega<\omega_o$ – частинка опускається, де ω_o – швидкість ковзання частинки по нерухомих поверхнях;

– $\beta > \mathrm{arctg}\, f$, $\omega=\omega_o$ – частинка «зависає» (кутові швидкості обертання поверхонь і ковзання частинки рівні по величині і протилежні за знаком і абсолютна швидкість обертання дорівнює нулю).

9. Розроблено узагальнену систему диференціальних рівнянь (3.186) – (3.188) транспортування частинки гвинтовим конвеєром. З'ясована принципова відмінність процесу транспортування частинки вертикальним (3.189), горизонтальним (3.191) і похилим конвеєрами.

Показано, що при вертикальному розташуванні осі конвеєра після стабілізації руху частинка піднімається вгору із сталою швидкістю по абсолютній траєкторії, якою є гвинтова лінія. При горизонтальному розташуванні осі конвеєра переміщення частинки відбувається по твірній циліндра вище від нижньої твірної при будь-якому значенні кутової швидкості обертання шнека. Для похилого розташування осі конвеєра встановлено кут її нахилу і кутову швидкість обертання шнека, коли абсолютна траєкторія у вигляді гвинтової лінії переходить у пряму і навпаки. Встановлено умови, за яких частинка піднімається вгору або опускається вниз.

Показано, що на транспортування частинки вгору позитивно впливає зменшення коефіцієнта тертя по поверхні шнека і збільшення коефіцієнта тертя – по поверхні кожуха.

Матеріали даного розділу опубліковано у працях [123, 125, 127, 129, 132, 161, 163, 164, 166, 168, 170, 171, 173, 176–178, 247, 248, 256, 290, 292, 309].

РОЗДІЛ 4
АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС РУХУ ЧАСТИНКИ ПО СТАЦІОНАРНИХ ПОВЕРХНЯХ У ФУНКЦІЇ ДОВЖИНИ ПРОЙДЕНОГО ШЛЯХУ

Окрім параметричних рівнянь у функції часу для дослідження руху частинок по поверхнях, що є стаціонарними або виконують різного роду рухи, можуть бути застосовані параметричні рівняння у функції натурального параметру.

4.1. Закономірності руху частинки

4.1.1. Рух частинки по гвинтовому коноїду, обмеженому вертикальним циліндром

Для спуску вантажів або матеріалу під дією сили власної ваги застосовується гравітаційний або самопливний транспорт. Такий транспорт широко використовується на вугільних шахтах, рудниках, збагачувальних фабриках.

Гравітаційний транспорт має переваги в порівнянні з іншими видами транспорту: його простота, висока продуктивність, відсутність складних пристроїв і обладнання, дешевизна. Однак є і недоліки: підвищений знос поверхні транспортування, подрібнення вантажу, залежність роботи від властивостей матеріалу, вологості, кліматичних умов. Принцип роботи гравітаційного самопливного транспорту розкрито в джерелах [11, 12, 36, 192, 235, 237, 300].

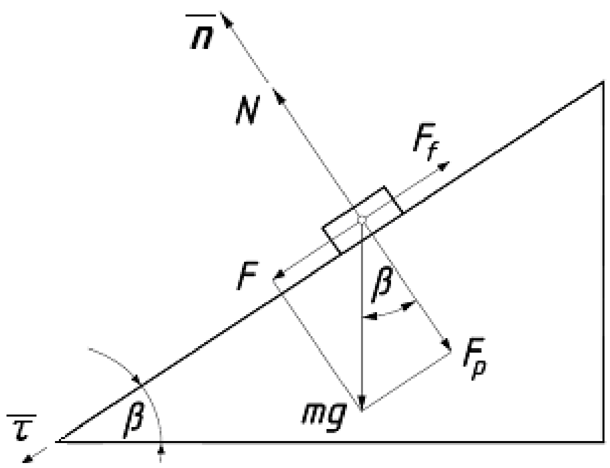
Застосування гвинтової поверхні для гравітаційного спуску вигідне тим, що займає невеликі габарити при транспортуванні вантажу на значну висоту. Крім того, на відміну від похилої площини, швидкість руху при спуску завжди стабілізується до сталої величини.

Перейдемо розв’язання конкретної практичної задачі: розробки аналітичного опису руху вантажу на прикладі частинки по поверхні гравітаційного спуску, утвореному двома поверхнями: гвинтовим коноїдом і співвісним циліндром.

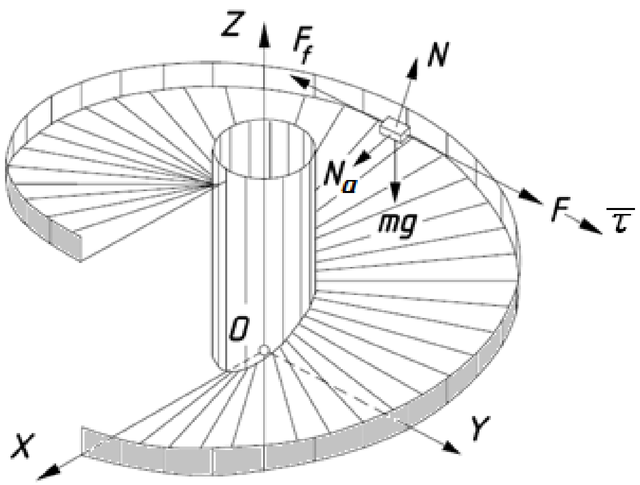
Найпростішим пристроєм самопливного транспорту є похила площина (див. рис. 4.1,а). Частинка або прийнятий за неї вантаж буде рухатися по похилій площині прямолінійно. Траєкторією руху є лінія найбільшого нахилу площини, перпендикулярна горизонтальним прямим площини. Кут β нахилу площини має бути більшим або рівним кутові тертя f, інакше ковзання вантажу стане неможливим.

У гвинтового коноїда (див. рис. 4.1,б) лінією найбільшого нахилу є гвинтова лінія, яка перпендикулярна до прямолінійних твірних коноїда і які є горизонталями поверхні. Вона має сталий кут підйому β, яким є кут між дотичною прямою, проведеною в будь-якій точці гвинтової лінії, і горизонтальною площиною. Множиною ліній найбільшого нахилу на площині є паралельні прямі, а на поверхні гвинтового коноїда – всі гвинтові лінії.

Відмінності полягають в тому, що при транспортуванні матеріалу траєкторіями його руху на похилій площині будуть лінії найбільшого нахилу (прямі лінії), а на поверхні гвинтового коноїда траєкторії руху не збігатимуться із лініями найбільшого нахилу (гвинтовими лініями) коноїда.



а)



б)

Рис. 4.1. Схема дії сил, прикладених до частинки, яка знаходиться на поверхнях гравітаційного спуску:

а) частинка на похилій площині;

б) частинка на поверхні гвинтового коноїда, обмеженого вертикальним циліндром

У початковий момент (на початку руху) частинка на поверхні гвинтового коноїда починає ковзати по лінії найбільшого нахилу – по гвинтовій лінії, що зумовлює виникнення відцентрової сили. Вона змушує частинку відхилятися від лінії найбільшого нахилу в сторону збільшення відстані від осі поверхні. Щоб цього не відбувалося, поверхню коноїда обмежимо вертикальним циліндром (див. рис. 4.1,б).

Спершу розглянемо рух частинки по похилій площині, який можна розглядати, як рух по прямій лінії, нахиленій до горизонту під кутом β (див. рис. 4.1,а). Векторне рівняння руху частинки має вигляд (2.3). Сили, які діють на частинку (сила ваги, реакція поверхні та сила тертя) мають бути спроєктовані на рухому систему координат, орт $\overline{\tau}$ якої спрямований в сторону руху, а орт $\overline{n}$ – перпендикулярно до орта $\overline{\tau}$. Вершина рухомої системи знаходиться в центрі частинки і рухається разом із нею.

Сила ваги mg розкладається на дві складові: рушійну силу $F=mg\sin\beta$ і силу тиску частинки на поверхню $F_p=mg\cos\beta$. Остання спричинює рівну по величині реакцію R поверхні, яка спрямована по нормалі $\overline{N}$ до неї в протилежну сторону. Сила тертя F_f спрямована в протилежну сторону від напряму руху частинки і залежить від величини реакції R: $F_f=fR$. Отже, $F_f=fmg\cos\beta$. Тоді векторне рівняння (2.3) може бути записане в проекціях на орти рухомої системи.

Прискорення є другою похідною шляху s по часу t: $a=\frac{d^2s}{dt^2}=s''$.

Рівняння руху в проекції на орт $\overline{\tau}$ має вигляд:

$$ms''=mg\sin\beta-fR. \tag{4.1}$$

В напрямку орта $\overline{n}$ частинка не рухається, тому прискорення дорівнює нулю і рівняння в проекції на цей орт має вигляд:

$$0=R-mg\cos\beta. \tag{4.2}$$

Із виразу (4.2) знаходимо силу реакції R і підставляємо в (4.1):

$$ms'' = mg\sin\beta - fmg\cos\beta. \tag{4.3}$$

Скоротимо рівняння (4.3) на масу m і остаточно отримаємо:

$$s'' = g(\sin\beta - f\cos\beta). \tag{4.4}$$

Диференціальне рівняння (4.4) є класичним прикладом руху частинки по похилій площині. Якщо f=tgβ, тобто площина нахилена під кутом тертя, то вираз в дужках стає рівним нулю і s'=V=$const$, тобто частинка рухатиметься зі сталою заданою початковою швидкістю або ж залишатиметься нерухомою (V=0 *м/с*). Після першого інтегрування рівняння (4.4) отримаємо вираз швидкості:

$$s' = V = gt(\sin\beta - f\cos\beta). \tag{4.5}$$

Після другого інтегрування рівняння (4.4) отримаємо вираз величини пройденого шляху:

$$s = \frac{gt^2}{2}(\sin\beta - f\cos\beta). \tag{4.6}$$

При $\beta=90^0$, тобто при вертикальній площині, формули (4.5) і (4.6) описують процес вільного падіння тіла без врахування опору повітря.

Якщо вираз у круглих дужках (4.5), (4.6) більший нуля, що відповідає куту нахилу площини більшому за кут тертя, то частинка буде рухатися рівноприскорено, якщо ж менший, то вона рівноприскорено буде гальмуватися до повної зупинки.

Адаптуємо викладену вище послідовність до руху частинки по коноїду, обмеженому співвісним циліндром (див. рис. 4.1,б). Частинка при русі по поверхні коноїда, віддаляючись від його осі, зустрінеться з обмежуючим циліндром і буде рухатися по гвинтовій лінії. Кут підйому гвинтової лінії сталий і залежить від радіуса r обмежуючого циліндра:

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{b}{r}, \tag{4.7}$$

де b = const – гвинтовий параметр поверхні.

З наближенням до осі коноїда кут β підйому гвинтової лінії збільшується. На периферії коноїда гвинтова лінія (лінія перетину коноїда з циліндром), має найменше значення кута β. Це значення має бути більшим від кута тертя. В іншому випадку рух вантажу буде неможливим. Відповідно до (4.7):

$$\beta = \mathrm{arctg}\frac{b}{r}. \tag{4.8}$$

Рівняння гвинтової лінії, по якій рухається частинка, запишеться:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\alpha; \\ y &= r\sin\alpha; \\ z &= b\alpha, \end{aligned} \tag{4.9}$$

де α – кут повороту точки гвинтової лінії навколо її осі, незалежна змінна.

Довжина шляху s траєкторії руху вантажу – гвинтової лінії (4.9) становить:

$$s = \int \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, d\alpha = \int \sqrt{r^2 + b^2}\, d\alpha = \alpha\sqrt{r^2 + b^2}. \tag{4.10}$$

Після підстановки виразу $b = r\,\mathrm{tg}\beta$ із (4.7) у (4.10) і спрощень отримаємо:

$$s = \frac{r\alpha}{\cos\beta}. \tag{4.11}$$

Рівняння руху частинки складаємо в проекціях на рухому систему координат якою є супровідний тригранник Френе гвинтової лінії – траєкторії руху частинки.

Проекції діючих на дотичну τ сил запишуться аналогічно похилій площині (4.1) з урахуванням того, що рушійна сила $F=mg\ \sin\beta$ спрямована в напрямі руху, а сила тертя $F_f=fR=fmg\ \cos\beta$ – в протилежну сторону (див. рис. 4.1,б). Однак при русі частинки по гвинтовій лінії виникає додаткова сила тертя внаслідок ковзання частинки по внутрішній поверхні обмежуючого циліндра. Її величина визначається із виразу: $F_{fa}=f_aR_a$, де f_a – коефіцієнт тертя частинки при ковзанні її по поверхні циліндра, R_a – сила реакції циліндра, спрямована перпендикулярно до його поверхні – осі циліндра (див. рис. 4.1,б). Вона рівна по величині відцентровій силі $F_в$, яка спрямована в протилежну сторону. Відцентрова сила виникає при русі частинки по гвинтовій лінії і визначається за формулою:

$$F_в = \frac{mV^2}{r_0}, \tag{4.12}$$

де r_0 = const – радіус кривини кривої в точці знаходження частинки:

$$r_0 = \frac{r}{\cos^2\beta}. \tag{4.13}$$

Швидкість V і прискорення s'' частинки знаходимо диференціюванням шляху s (4.11):

$$\begin{gathered} V = s' = \frac{r\alpha'}{\cos\beta}; \\ s'' = \frac{r\alpha''}{\cos\beta}. \end{gathered} \tag{4.14}$$

Підставимо вираз швидкості V із (4.14) і вираз радіуса кривини r_0 із (4.13) в (4.12) і після спрощень отримаємо величину відцентрової сили: $F_в=ma\alpha'^2$. Тоді величина сили тертя частинки при її ковзанні по поверхні циліндра запишеться: $F_{fa}=mf_ar\alpha'^2$. Підставимо у рівняння (4.1) вираз прискорення із (4.14), силу тертя по поверхні шнека $F_f=fR=fmg\cos\beta$ і силу тертя по поверхні циліндра $F_{fa}=mf_a r\alpha'^2$. Після скорочення на масу m частинки отримаємо диференціальне рівняння руху частинки вздовж гвинтової лінії:

$$\alpha'' = \frac{g\cos\beta}{r}(\sin\beta - f\cos\beta) - f_a\alpha'^2\cos\beta. \tag{4.15}$$

Диференціальне рівняння (4.15) має аналітичний розв'язок. Проте попередньо можна зробити деякі важливі висновки на основі його якісного аналізу. Припустимо, що бічна поверхня обмежуючого циліндра абсолютно гладенька ($f_a=0$). Тоді права частина рівняння (4.15) буде сталою величиною. Це означає, що рух частинки буде рівноприскореним або рівносповільненим в залежності від величини кута β (більший або менший за кут тертя) – аналогічний руху по похилій площині.

Якщо кут β дорівнює куту тертя f, то вираз у круглих дужках буде дорівнювати нулю. Отримуємо $\alpha''=0$, тобто $\alpha'=\omega$ - *const*. Це означає, що частинка буде рухатися зі сталою кутовою швидкістю обертання ω, звідки можна знайти і лінійну швидкість із (4.14), яка теж буде сталою. Величина цієї швидкості дорівнюватиме початковій, включаючи і $V=0$ *м/с*. Якщо кут β дорівнює куту тертя, але $f_a\neq 0$, то частинка буде гальмуватися внаслідок дії сили тертя по поверхні циліндра. У цьому полягає відмінність від спуску по похилій площині, по якій частинка у такому випадку буде рухатися зі сталою швидкістю.

У загальному випадку, коли кут β підйому гвинтової лінії більший за кут тертя, рушійна сила і сила тертя по поверхні коноїда і по поверхні циліндра врівноважаться між собою і кутова швидкість обертання ω частинки α' стане сталою. Тоді $\alpha''=0$ і з рівняння (4.15) отримаємо величину кутової швидкості обертання ω частинки навколо осі гвинтового коноїда:

$$\omega = \alpha' = \sqrt{\frac{g}{rf_a}(\sin\beta - f\cos\beta)}. \tag{4.16}$$

Зазначимо, що такий вираз кутової швидкості було отримано в третьому підрозділі. У формулі (3.177) він є складовою кутової швидкості ковзання частинки, якщо конструкцію гвинтового спуску додатково обертати навколо власної осі.

Швидкість частинки знаходимо за першою формулою (4.14) із урахуванням (4.16):

$$V = \frac{r}{\cos\beta}\sqrt{\frac{g}{rf_a}(\sin\beta - f\cos\beta)}. \qquad (4.17)$$

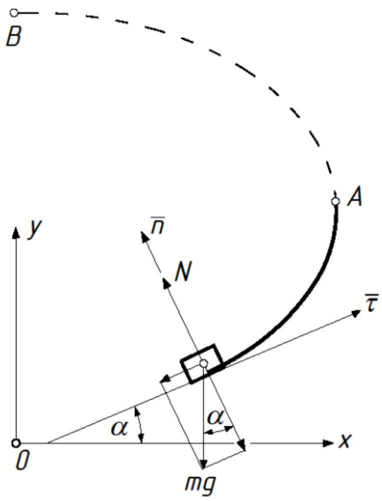
При гравітаційному транспортуванні матеріалу є обмеження на швидкість його руху. При відомих коефіцієнтах тертя f і f_a формула (4.17) дозволяє визначити потрібну швидкість транспортування матеріалу при різних співвідношеннях конструктивних параметрів r і β. Для запобігання пошкодження вантажу швидкість його руху не повинна перевищувати 2,5 м/с. Наприклад, при заданій швидкості V=2 м/с, f=f_a=0,3, β=30° із формули (4.17) знаходимо r=0,38 м.

4.1.2. Проєктування криволінійної осі силосопроводу для транспортування подрібненої маси

Розглянемо ще одну практичну задачу. Після подрібнення зеленої маси ріжучим барабаном в кормозбиральних комбайнах її необхідно завантажити у транспортний засіб. Для цього використовується силосопровід, який спрямовує рух подрібненої маси в потрібному напрямі. Траєкторія руху частинок визначається формою плоскої кривої – осі силосопроводу.

Не дивлячись на просту конструкцію силосопроводу, від форми його осі великою мірою залежить процес транспортування. Він повинен бути спроєктований таким чином, щоб не відбувалося надмірного гальмування подрібненої маси або її «залипання» на поверхні силосопроводу. Кінетичної енергії, яку частинка отримує від подрібнюючого барабана, потрібно вистачити, щоб подолати шлях у силосопроводі і мати певну швидкість руху на виході з нього.

Розробимо математичну модель руху частинки в силосопроводі з криволінійною віссю з дослідженням впливу кривини осі на процес транспортування подрібненої маси (див. рис. 4.2,а).



а) б)

Рис. 4.2. Графічні ілюстрації до руху частинки по кривій лінії – осі силосопроводу:
а) транспортування подрібненої маси у транспортний засіб;
б) схема руху окремої частинки і прикладені до неї сили

Траєкторією руху частинок є крива лінія – вісь силосопровода. При русі по кривій окремої частинки, яка попала на цю криву з початковою швидкістю V_o (див. рис. 4.2,б), діють дві сили: сила ваги mg і сила тертя, спрямована в протилежну руху сторону. Складова сили тертя може як сприяти руху частинки при її ковзанні вниз по кривій, так і гальмувати цей рух при підйомі частинки. Для силосопровода маємо другий випадок: складова сили ваги гальмує ковзання частинки і навіть намагається її відірвати від кривої на ділянці AB, яка відповідає осі силосопроводу. Щоб відривання не відбулося, швидкість частинки має бути достатньою для створення відцентрової сили, яка притискає її до стінки силосопроводу.

Рух частинки розглядався в рухомій системі супровідного тригранника кривої, орт $\bar{\tau}$ якої спрямований по дотичній до траєкторії, орт головної нормалі $\bar{n}$

спрямований до центру кривини і перпендикулярний до орта $\overline{\tau}$ та орт бінормалі $\overline{b}$ проекціюється в точку. Диференціальні рівняння руху частинки в проекціях на орти тригранника Френе у функції довжини дуги кривої s запишуться:

$$mV\frac{dV}{ds} = F_\tau; \qquad mV^2k = F_n, \tag{4.18}$$

де V – швидкість руху частинки, м/с,

k – кривина кривої у поточній точці,

F_τ і F_n – проекції прикладених до частинки сил.

Сила ваги mg розкладається на орти тригранника через кут α, який є змінним кутом між двома системами: рухомого тригранника і нерухомої системи координат Oxy. Сила реакції R спрямована в напрямі орта $\overline{n}$ і сила тертя $f{\cdot}R$ спрямована в протилежну сторону орта $\overline{\tau}$: $F_n = R - m{\cdot}g{\cdot}\cos\alpha$, $F_\tau = -m{\cdot}g{\cdot}\sin\alpha - f{\cdot}R$. Кривина k за визначенням є похідна кута α: $k = \frac{d\alpha}{ds}$. Із урахуванням цього рівняння (4.18) запишуться:

$$mV\frac{dV}{ds} = -mg\sin\alpha - fR; \qquad mV^2\frac{d\alpha}{ds} = R - mg\cos\alpha. \tag{4.19}$$

Із другого рівняння (4.19) знаходимо: $R = mV^2\alpha' + mg\cos\alpha$. Після підстановки цього виразу у перше рівняння і скорочення на масу m отримаємо диференціальне рівняння:

$$V\frac{dV}{ds} = -g\sin\alpha - f\left(V^2\frac{d\alpha}{ds} + g\cos\alpha\right). \tag{4.20}$$

Щоб розв'язати диференціальне рівняння (4.20), потрібно задати одну із залежностей: форму кривої *α=α(s)* або ж закономірність зміни швидкості *V=V(s)*.

Розглянемо приклад. Нехай віссю силосопровода буде крива, задана залежністю $\alpha = ks$, де кривина $k = \frac{1}{r} = \text{const}$. У такому випадку віссю буде дуга кола радіуса r. Диференціальне рівняння (4.20) набуває вигляду:

$$\frac{dV}{ds} = -\frac{g}{V}(\sin k\,s + f\cos k\,s) - fVk. \tag{4.21}$$

Рівняння (4.21) має наступний розв'язок:

$$V = \sqrt{ce^{-2fks} + 2g\frac{(1-2f^2)\cos ks - 3f\sin ks}{k(1+4f^2)}}. \tag{4.22}$$

Сталу інтегрування c визначимо за умови, що в початковій точці при $s=s_o$ швидкість руху частинки має значення $V=V_o$. Оскільки $\alpha=ks$ *і* у початковій точці A (див. рис. 4.2,б) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $s = s_0 = \frac{\pi}{2k}$. Після врахування цих початкових даних, вираз (4.22) набуває вигляду:

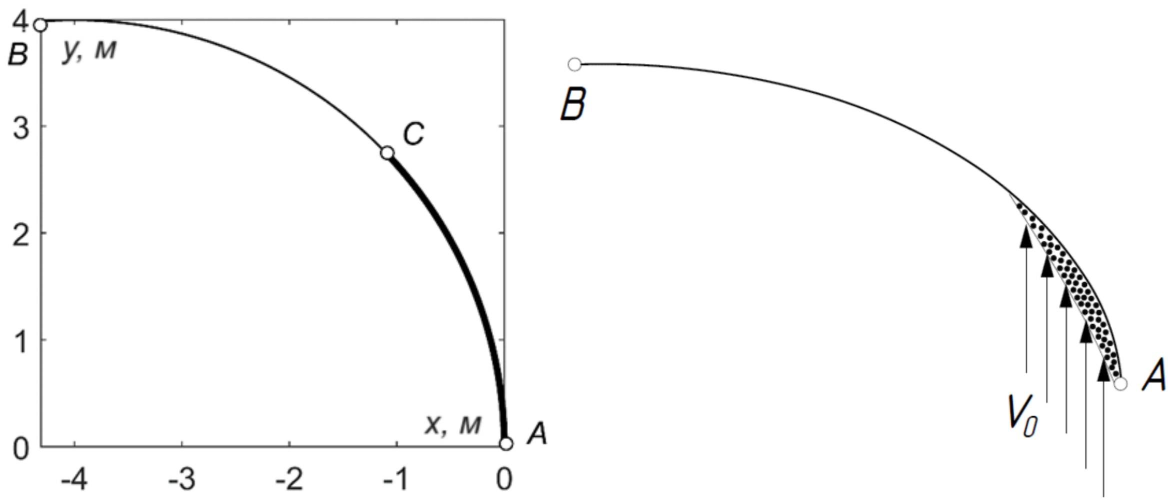
$$V = \sqrt{kV_0^2 e^{f(\pi-2ks)} + 2g\frac{(1-2f^2)\cos ks - 3f\left(e^{f(\pi-2ks)} - \sin ks\right)}{k(1+4f^2)}}. \tag{4.23}$$

Маючи вираз швидкості (4.23), знаходимо силу реакції R поверхні:

$$R = m(V^2k + g\cos k\,s). \tag{4.24}$$

Відлік дуги s у обох формулах (4.23) і (4.24) починається з $s_0 = \frac{\pi}{2k}$, оскільки це відповідає кутові $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

На рис. 4.3,а побудована дуга кола в ролі осі силосопроводу для k=0,25 (r=4 *м*), а на рис. 4.4 – залежності $V=V(s)$ і $R=R(s)$ для різних значень початкової швидкості V_0.

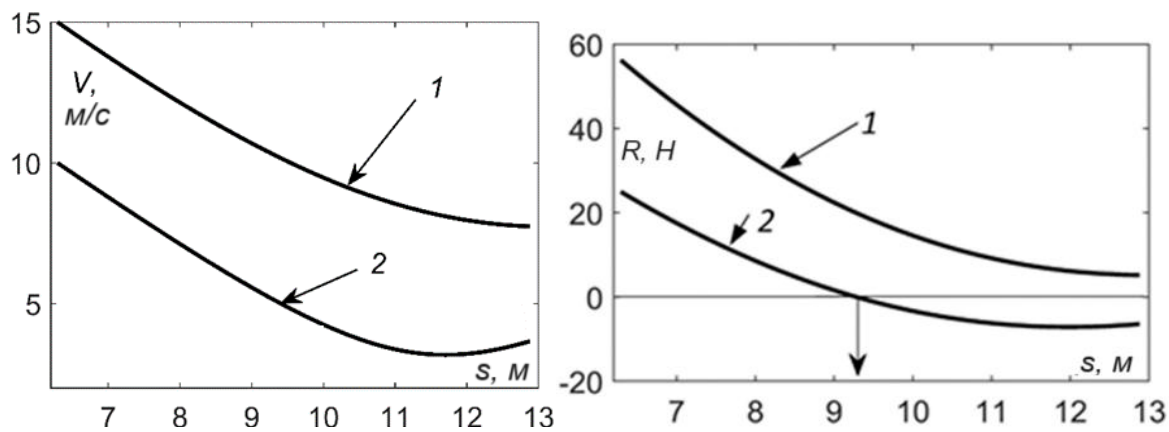


а) б)

Рис. 4.3. Можливі осі силосопроводу:

а) вісь силосопроводу зі сталою кривиною $k=0,25$ (r = 4 *м*);

б) вісь силосопроводу зі змінною кривиною і найбільшим її значенням в початковій точці A



а) б)

Рис. 4.4. Графіки зміни швидкості V і сили реакції R згідно формул (4.23) і (4.24) при k=0,25, f=0,3, і різних початкових швидкостях (*1* – V_0=15 *м/с*, *2* – V_0=10 *м/с*):

а) графік залежності $V=V(s)$;

б) графік залежності $R=R(s)$ для частинки масою m=0,001 *кг*

В обох випадках частинка не зупиняється (див. рис. 4.4,а), однак при V_0=10 *м/с* при значенні s=9,3 *м* сила реакції частинки стає рівною нулю (див. рис. 4.4,б) – вона відривається від поверхні силосопровода. Точка відриву від поверхні на рис. 4.3,а позначена літерою *C*. У цьому місці частинка продовжує рухатися далі не по верхній обмежувальній поверхні, яка для наочності зображена тонкою лінією, а по нижній, тобто напрям сили реакції змінився на протилежний.

При транспортуванні маси важливо забезпечити мінімальний опір її переміщенню при вступі у силосопровід. Опір створюється силою тертя, яка прямопропорційна силі реакції *R*. Згідно формули (4.24) однією зі складових сили реакції є складова сили ваги, однак вона відсутня в момент вступу, оскільки кут $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Друга складова (4.24) залежить від кривини осі і швидкості *V*. Тоді у точці вступу маси у силосопровід його вісь повинна мати мінімальну кривину або ж вона повинна бути рівною нулеві і наростати плавно. Якщо за вісь силосопроводу взяти дугу еліпса (див. рис. 4.2,б), то в початковій точці *A* кривина буде максимальна, що призведе до різкого гальмування подрібненої маси або до її «залипання» (див. рис. 4.3,б). «Залипання» маси змінює шлях її руху, що рівносильно зміні форми осі. При цьому кривина осі зменшується і ковзання частинок відбувається по скоригованій осі з меншою кривиною (частинки ковзають по масі, що «залипла»).

У зв’язку з цим розглянемо ще один приклад із заданим значенням кривини осі в початковій і кінцевій точках силосопроводу. Аналізуючи форму осі силосопроводу, зображеного на рис. 4.2,а, поставимо умову, щоб її кривина в початковій (при $\alpha = \frac{\pi}{2}$) і кінцевій (при $\alpha = \pi$) була рівною нулеві. Це означає, що під час руху маси напрям її транспортування змінюється на величину прямого кута. Щоб ця зміна відбулася, кривина осі повинна зростати від мінімального k_{min} до максимального значення k_{max} і потім зменшитися до певного значення в кінцевій точці. Таку залежність $k=k(\alpha)$ опишемо квадратичним поліномом. Нехай кривина набуватиме мінімального значення k_{min} на початку і в кінці силосопроводу і максимального значення k_{max} в середній точці силосопроводу (при $\alpha = \frac{3\pi}{4}$). Склавши систему трьох рівнянь для значень кривини у трьох точках осі, знаходимо залежність $k=k(\alpha)$:

$$k = a + b\alpha + c\alpha^2, \quad (4.25)$$

де $a = 9k_{min} - 8k_{max}$;

$b = \dfrac{24(k_{max} - k_{min})}{\pi}$;

$c = -\dfrac{16(k_{max} - k_{min})}{\pi^2}$.

Щоб скористатися диференціальним рівнянням (4.20), потрібно від залежності $k=k(\alpha)$ (4.25) перейти до $\alpha=\alpha(s)$. Із визначення кривини $k = \frac{d\alpha}{ds}$ можна записати: $ds = \frac{d\alpha}{k}$. Таким чином, вираз довжини дуги $s=s(\alpha)$ можна знайти інтегруванням:

$$s = \int \frac{d\alpha}{a + b\alpha + c\alpha^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \text{Arctg} \frac{2c\alpha + b}{\sqrt{4ac - b^2}}. \quad (4.26)$$

Із залежності (4.26) $s=s(\alpha)$ можна знайти обернену залежність $\alpha=\alpha(s)$, в яку після підстановки сталих a, b, c остаточно отримаємо:

$$\alpha = \frac{\pi}{4}\left(3 + \frac{k_{max}}{d} \text{Tanh} \frac{4d}{\pi} s\right). \quad (4.27)$$

де $d = \sqrt{k_{max}(k_{max} - k_{min})} = \text{const}$.

Вираз кривини $k = \frac{d\alpha}{ds}$ знаходимо диференціюванням (4.27):

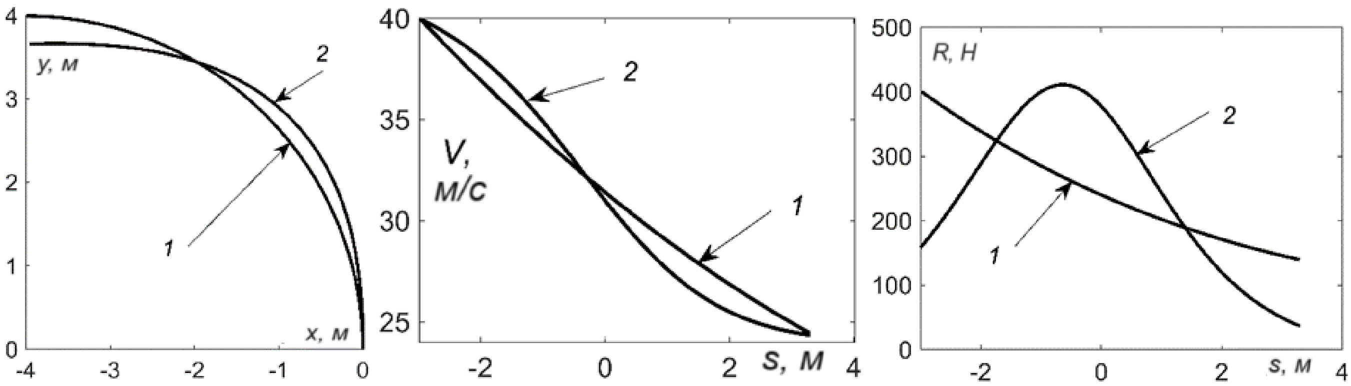
$$k = k_{max} \text{Sech}^2 \left(\frac{4d}{\pi} s\right). \quad (4.28)$$

Отриманих залежностей (4.27) і (4.28) достатньо для розв’язування диференціального рівняння (4.20), яке в даному випадку потребує чисельних методів. Вісь силосопроводу знаходимо чисельним інтегруванням відомих рівнянь:

$$x = \int \cos\alpha\,(s)\,ds; \quad y = \int \sin\alpha\,(s)\,ds, \tag{4.29}$$

де залежність *α=α(s)* наведено в (4.27).

На рис. 4.5,а побудовано дві осі однакової довжини (s=6,3 *м*): одна вісь є дугою кола радіуса r=4 *м* (k=0,25=*const*) і позначена цифрою *1*, друга побудована за рівняннями (4.27), (4.29) при k_{min}=0,1, k_{max}=0,4 і позначена цифрою 2. На рис 4.5,б,в відповідними цифрами позначені графіки зміни швидкості V і сили реакції R. Для дуги кола ці графіки близькі до лінійних залежностей.



а) б) в)

Рис. 4.5. Криволінійні осі силосопроводу та графіки зміни деяких параметрів руху частинки вздовж цих осей:

а) криволінійні осі однакової довжини (*s = 6,3 м*);

б) графіки залежностей *V=V(s)* для руху частинки вздовж осей;

в) графіки залежностей *R=R(s)* для руху частинки вздовж осей

Цікаво, що для обох осей при початковому значенні V_o=40 *м/с* швидкості змінюються по-різному при русі вздовж осі, але кінцеві швидкості теж однакові (див. рис. 4.5,б). Цей результат є випадковим, тому що при меншій довжині осей кінцеві швидкості були б різними. Графіки зміни сили реакції, тобто тиску поверхні на частинку (див. рис. 4.5,в) відрізняються кардинально. Якщо для кола тиск на початку руху максимальний і поступово зменшується, то для другої осі він поступово зростає, а потім зменшується. Саме це запобігає «залипанню» маси на початку руху.

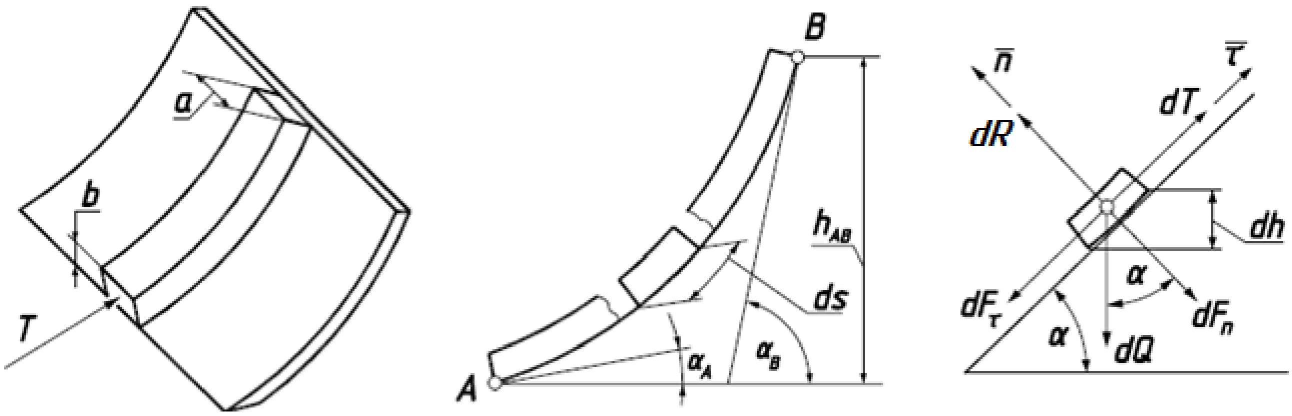
Крім того, проєктування осі силосопроводу керуванням її кривини дає можливість отримувати різні форми кривих.

4.2. Рух абсолютно гнучкої нестискуваної смуги по внутрішній поверхні горизонтального циліндра

4.2.1. Рух смуги по поверхні циліндра перпендикулярно до його твірних

Частинки матеріалу можуть утворювати суцільне середовище, одним із варіантів якого може бути гнучка смуга [230]. При русі по поверхні вона деформується, набуваючи її форми. Узагальненням розгляду руху окремої частинки є дослідження нестискуваної смуги як сукупності окремих пов’язаних частинок.

Нехай абсолютно гнучка смуга прямокутного перерізу з розмірами a і b розташована на внутрішній поверхні горизонтального циліндра (див. рис. 4.6,а).



а) б) в)

Рис. 4.6. До розгляду руху гнучкої смуги по циліндричній поверхні:

а) форма смуги і її положення на поверхні;

б) виділення елемента смуги довжиною ds;

в) віднесення елемента смуги до рухомої системи координат із зазначенням діючих на нього сил

Щоб її перемістити вгору з постійною швидкістю *V*, необхідно докласти певних зусиль *T*. Подібна ситуація може виникнути при роботі бульдозера, якщо прийняти шар матеріалу, що рухається по робочій поверхні, за гнучку смугу. У такому випадку скибу ґрунту можна прийняти за смугу прямолінійного перерізу, довжина якої в процесі деформації не змінюється, тобто вона є нестискуваною. Роль зусилля *T* у цьому випадку відіграють сили підпору, під дією яких смуга змушена рухатися вгору. Для визначення величини зусилля розглянемо елемент смуги довжиною ds (див. рис. 4.6,б). Можна уявити, що смуга складається з елементарних шматочків, кожен з яких нахилений під певним кутом α до горизонтальної площини. Тоді зусилля *T* буде сумою зусиль кожного елемента смуги – задача зводиться до інтегрування елементарних зусиль по довжині дуги s між точками *A* і *B*. Зусилля *T* визначатимемо саме для цієї ділянки без урахування смуги і діючих на неї сил поза точками *A* і *B*.

Розглянемо елемент смуги, нахилений до горизонтальної площини під кутом α (див. рис. 4.6,в). У центрі елемента розташуємо початок рухомої системи координат, один орт $\bar{\tau}$ якої є дотичним до кривої поперечного перерізу циліндра і спрямований у бік руху смуги, а другий орт нормалі $\bar{n}$ – перпендикулярний орту $\bar{\tau}$ і спрямований в бік кривизни кривої. Третій орт бінормалі $\bar{b}$ у такому випадку проекціюється в точку і для вирішення задачі не грає ролі.

Усі діючі на елемент смуги сили спроекціюємо на орти натурального тригранника Френе.

Елементарна сила ваги dQ спрямована вниз, визначається добутком об’єму $a \cdot b \cdot ds$ на щільність матеріалу смуги q і постійну прискорення вільного падіння $g=9{,}81$ *м/с*^{2}: $dQ=a \cdot b \cdot q \cdot g \cdot ds$. Розкладемо цю силу на орти тригранника:

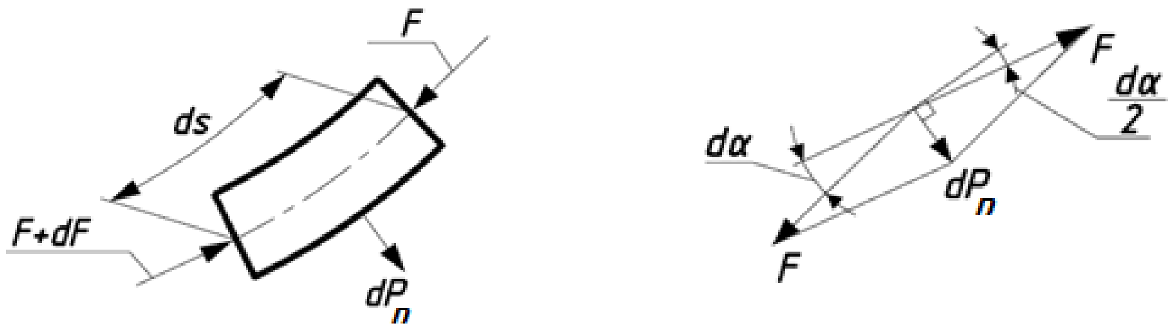
$$\begin{aligned} dQ_\tau &= abqg \sin\alpha\, ds; \\ dQ_n &= abqg \cos\alpha\, ds. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Відцентрова сила інерції dI виникає внаслідок руху елемента по криволінійній траєкторії зі швидкістю *V*. Вона спрямована уздовж орта $\bar{n}$ в протилежну його напрямку сторону та залежить від маси $m=a \cdot b \cdot q\ ds$ елемента смуги, швидкості V його руху і кривизни k кривої в поточній точці:

$$dI_n = abqkV^2 ds. \tag{4.31}$$

За рахунок ваги і внаслідок згинання смуги виникає ще одна елементарна сила dP_n, спрямована вздовж нормалі $\bar{n}$ в ту саму сторону, що і відцентрова сила. При штовханні смуги виникає зусилля, яке стискає її елементарний об'єм. Найбільше значення це зусилля має в точці A (див. рис. 4.6,б), оскільки воно викликане вагою смуги між точками A і B – різницею висоти h_{AB}. У точці B воно дорівнює нулю.

Розглянемо елемент смуги з прикладеним до неї стискаючим зусиллям (див. рис. 4.7).



а) б)

Рис. 4.7. До визначення елементарної сили dP_n, що виникає внаслідок стискання смуги:

а) прикладені до елементу смуги стискаючі сили і виникаюча елементарна сила dP_n;

б) схема розташування сил для визначення елементарної сили dP_n

Справа на елемент смуги діє сила F, яка до кінця елемента зростає на dF за рахунок різниці висоти dh (див. рис. 4.6,в). Цією силою $F+dF$ врівноважується елемент смуги. Виникає результуюча сила dP_n, направлена по нормалі. Для визначення її величини розглянемо рис. 4.7,б. При граничному значенні, коли довжина елемента смуги наближається до нуля, стискаючі сили зліва і справа стають рівними F. Силу dP_n знаходимо векторним додаванням сил F з використанням елементарного кута $d\alpha$ між дотичними на початку і в кінці елемента смуги.

Відповідно до рис. 4.7,б можна записати:

$$dP_n = 2F\cos\left(90^\circ - \frac{d\alpha}{2}\right) = 2F\sin\frac{d\alpha}{2}. \qquad (4.32)$$

Беручи до уваги той факт, що приріст кута $d\alpha$ нескінченно малий, запишемо: $\sin\frac{d\alpha}{2} = \frac{d\alpha}{2}$. Підставимо цей вираз у (4.32):

$$dP_n = Fd\alpha. \qquad (4.33)$$

По мірі зміни кута α сила P_n буде збільшуватися на приріст $dP_n=a\cdot b\cdot q\cdot dh$. У точці B сила F дорівнює нулю, а в точці A має максимальне значення, що дорівнює силі підйому смуги між точками A і B – відповідне висоті h_{AB} (див. рис. 4.16,б). Для елемента смуги запишемо: $dF=a\cdot b\cdot q\cdot g\cdot dh$. Із рис. 4.6,в маємо: $dh=\sin\alpha ds$. Початкова сила стиску F_0 в точці A визначиться інтегруванням виразу:

$$F_0 = abqg\int_{s_A}^{s_B}\sin\alpha\, ds. \qquad (4.34)$$

Залежність $\alpha=\alpha(s)$ у виразі (4.34) визначається із рівняння кривої поперечного перерізу циліндра. Виходячи з цього, можна знайти залежність зміни стискаючого зусилля $F=F(s)$, яке буде зменшуватися від F_0 у точці A до нуля в точці B.

Силу (4.33) необхідно додавати до інших елементарних сил (4.30) і (4.31). Приведемо її в залежність від загальної змінної s – від довжини дуги кривої перерізу циліндра: $dP_n = Fd\alpha = F\frac{d\alpha}{ds}ds$, де $\frac{d\alpha}{ds} = k$ – кривина траєкторії. Із урахуванням цього вираз (4.33) набуває вигляду:

$$dP_n = Fkds. \tag{4.35}$$

Додамо елементарні сили (4.30), (4.31), (4.33), спрямовані вздовж нормалі:

$$dF_n = (abqg\cos\alpha + abqkV^2 + Fk)ds. \tag{4.36}$$

Елементарна сила dF_n врівноважується реакцією поверхні dR=dF_n (див. рис. 4.6,в). Нормальна реакція викликає елементарну силу тертя dF_{f1}, спрямовану вздовж орта $\bar{\tau}$ у протилежну швидкості руху сторону:

$$dF_{f1} = fdR = f(abqg\cos\alpha + abqkV^2 + Fk)ds, \tag{4.37}$$

де f – коефіцієнт тертя.

Ця сила тертя викликає додаткове стискаюче зусилля T, прикладене до кінців елемента (див. рис. 4.7,а, де в ролі сили F виступає сила T). Отже, виникає рівнодійна dP_{n2}, яку знаходимо з виразу (4.32). В результаті відповідно до (4.35) отримуємо:

$$dP_{n2} = Tkds. \tag{4.38}$$

Сила dP_{n2}, що притискає виділений елемент смуги до поверхні, створює додаткову силу тертя dF_{f2}:

$$dF_{f2} = fdP_{n2} = fTkds. \tag{4.39}$$

Знайдені елементарні сили опору пересуванню елемента смуги діють вздовж орта дотичної у протилежну руху сторону. Сума елементарних сил опору складається з сили ваги dQ_τ і сил тертя dF_{f1}, dF_{f2}: dF_τ=dQ_τ+dF_{f1}+dF_{f2}. Повний приріст зусилля dT, яке пересуває елемент смуги, дорівнює сумі елементарних сил опору. Із урахуванням знайдених виразів (4.30), (4.37) і (4.39) запишемо:

$$dT = abqg \sin\alpha\, ds + f(abqg \cos\alpha + abqkV^2 + Fk)ds + fTkds. \quad (4.40)$$

Із (4.40) отримаємо диференціальне рівняння руху:

$$\frac{dT}{ds} = abqg \sin\alpha + f(abqg \cos\alpha + abqkV^2 + Fk + Tk). \quad (4.41)$$

При $k=0$ (при $\alpha=const$) диференціальне рівняння (4.41) спрощується і описує рух смуги по похилій площині. Зусилля штовхання не залежить від її швидкості руху, а також зникає сила тертя від стискання смуги.

Розглянемо приклад. Нехай кривою поперечного перерізу циліндра буде дуга кола радіуса $r\left(k = \frac{1}{r} = \text{const}\right)$. Із залежності $\frac{d\alpha}{ds} = k$ знаходимо: $\alpha = ks = \frac{s}{r}$. Початкове s_A і кінцеве s_B значення дуги s запишуться: $s_A = \frac{\alpha_A}{k} = \alpha_A r$; $s_B = \frac{\alpha_B}{k} = \alpha_B r$. За формулою (4.34) знаходимо зусилля стиску F_0 на початку смуги, тобто в точці A:

$$F_0 = abqg \int_{s_A}^{s_B} \sin ks\, ds = -\frac{abqg}{k}(\cos k\, s_B - \cos k\, s_A) = \\ = abqgr(\cos\alpha_A - \cos\alpha_B). \quad (4.42)$$

Інтегруванням виразу (4.34) знаходимо зусилля F, виходячи з умови, що при $s=s_A$ $F=F_0$:

$$F = F_0 - abqgr(\cos\alpha_A - \cos ks) = abqgr(\cos ks - \cos\alpha_B). \quad (4.43)$$

Підставляємо вираз (4.43) у диференціальне рівняння (4.41) та, враховуючи $k = \frac{1}{r}$, після спрощень отримуємо:

$$\frac{dT}{ds} = abqg\sin\frac{s}{r} + f\left[\frac{abq}{r}V^2 + abqg\left(2\cos\frac{s}{r} - \cos\alpha_B\right) + \frac{T}{r}\right]. \tag{4.44}$$

Диференціальне рівняння (4.44) має наступний розв’язок:

$$T = Ce^{\frac{fs}{r}} - abq\left[(V^2 - gr\cos\alpha_B) + \frac{gr}{1+f^2}\left([1+2f^2]\cos\frac{s}{r} - f\sin\frac{s}{r}\right)\right], \tag{4.45}$$

де C – постійна інтегрування. Її значення знаходимо з умови, що при s=s_B=$\alpha_B \cdot r$ сила T (4.45) дорівнює нулю:

$$C = abqe^{-f\alpha_B}\left[V^2 + \frac{fgr}{1+f^2}(f\cos\alpha_B - f\sin\alpha_B)\right]. \tag{4.46}$$

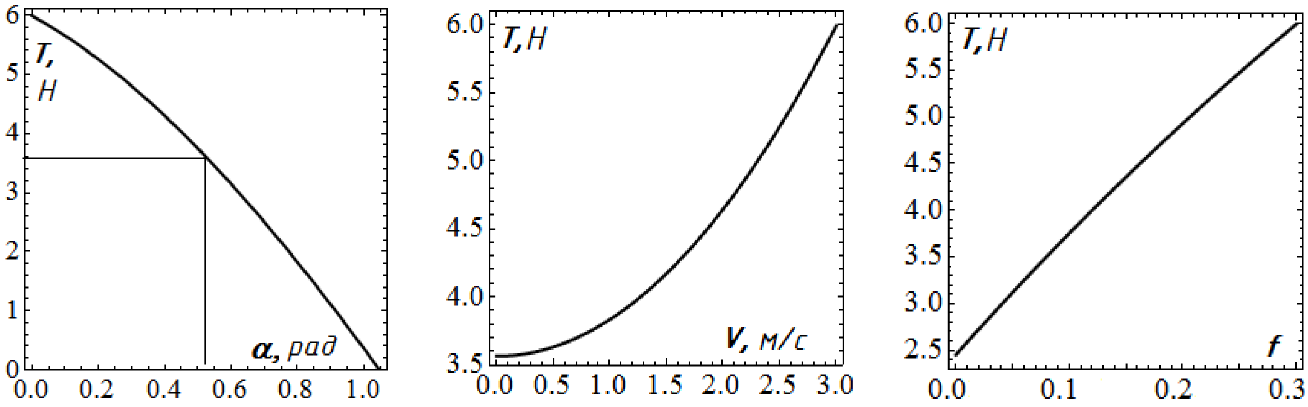
У виразі (4.45) зручно перейти до нової змінної – кута α. Беручи до уваги, що $\frac{s}{r} = \alpha$, а також підставляючи C із (4.46) у (4.45), остаточно отримаємо залежність зусилля штовхання $T=T(\alpha)$:

$$\begin{gathered} T = abq[\left(e^{f(\alpha-\alpha_B)} - 1\right)V^2 + gr\cos\alpha_B + \\ + \frac{abqgr}{1+f^2}\left(f\sin\alpha + fe^{f(\alpha-\alpha_B)}(f\cos\alpha_B - f\sin\alpha_B) - (1+2f^2)\cos\alpha\right)]. \end{gathered} \tag{4.47}$$

Щоб визначити зусилля T для штовхання смуги, необхідно за формулою (4.47) знайти значення при α=α_B і α=α_A та знайти їх різницю. Оскільки зусилля T при α=α_B дорівнює нулю, то досить у формулу (4.47) підставити α=α_B і отриманий негативний результат взяти з протилежним знаком. Це рівносильно використанню формули (4.47) зі знаком «мінус» перед нею.

Нехай вихідні дані мають значення: a=0,2 *м,* b=0,05 *м,* q=100 *кг/м*^{3}*,* r=0,5 *м,* f=0,3, V=3 *м/с,* α_A=0, $\alpha_{\text{В}} = \frac{\pi}{3}$. Застосувавши формулу (4.47) зі знаком «мінус» і підставивши в неї $\alpha=\alpha_A=0$, отримуємо: T=5,99 H. Різниця між кутами α_A і α_B (так званий кут обхвату) становить 60^0. При $\alpha = \alpha_{\text{A}} = \frac{\pi}{6}$ кут обхвату складає 30^0 і T=3,6 H.

На рис. 4.8,а побудовано графік залежності $T=T(\alpha)$, з якого можна визначити зусилля T при заданому значенні $\alpha=\alpha_A$. З нього видно, що при $\alpha = \alpha_{\text{A}} = \frac{\pi}{6} = 0{,}52$ зусилля T має те саме значення: T=3,6 H.



а) б) в)

Рис. 4.8. Графіки, що ілюструють вплив різних чинників на зусилля штовхання смуги при зміні кута α в межах від α_A=0 до $\alpha_{\text{B}} = \frac{\pi}{3}$:

а) в залежності від кута $\alpha=\alpha_A$;

б) в залежності від швидкості V руху смуги;

в) в залежності від коефіцієнта тертя f

Знайдемо зусилля T при куті обхвату 30^0, але з іншими межами зміни кута α: α_A=0, $\alpha_{\text{B}} = \frac{\pi}{6}$. Його знаходимо за допомогою формули (4.47), оскільки графік на рис. 4.8,а побудовано для кута $\alpha_{\text{B}} = \frac{\pi}{3}$. Знайдене зусилля має значення T=2,6 H. Зменшення зусилля штовхання смуги пояснюється тим, що її підйом здійснюється на меншу висоту. На рис. 4.8,б показано вплив швидкості руху смуги на необхідне зусилля для її штовхання, а на рис. 4.8,в – коефіцієнта тертя.

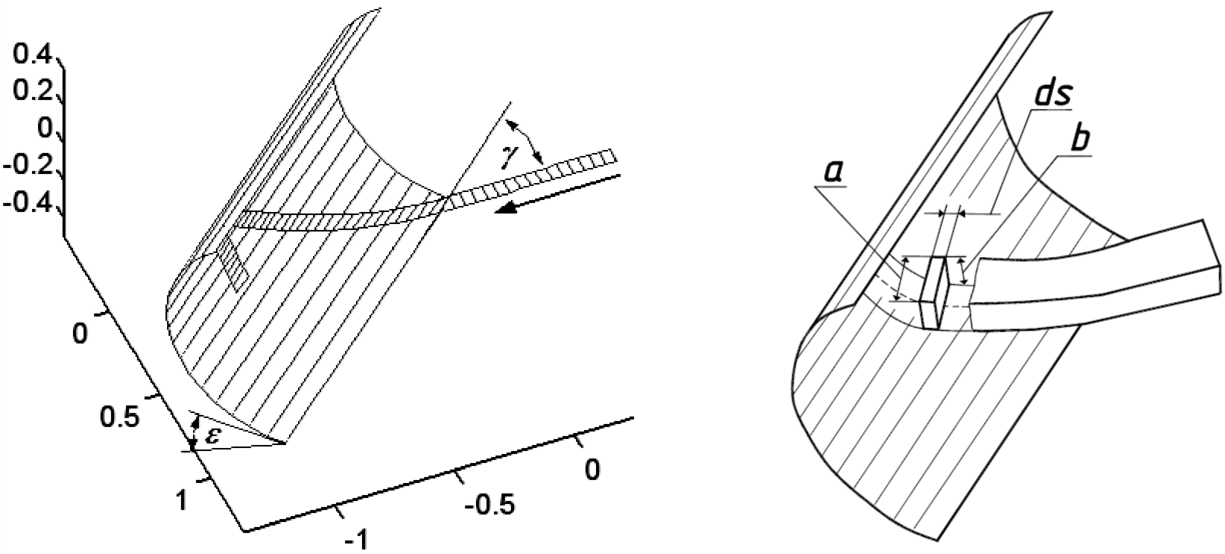
Великe значення для зусилля штовхання має шорсткість поверхні. При абсолютно гладкій поверхні (при f=0) сила штовхання значно менше (див. рис. 4.8,в).

Отримані формули дають можливість розрахувати необхідну потужність для забезпечення заданої швидкості пересування смуги. Для цього досить помножити зусилля *T* на швидкість *V*.

4.2.2. Рух смуги по поверхні циліндра під кутом до його твірних

Абсолютно гнучка нестискувана смуга може вступати на циліндричну поверхню з горизонтальним розташуванням прямолінійних твірних не тільки перпендикулярно до твірних, а під певним кутом до них. У такому випадку траєкторія руху смуги буде просторовою кривою.

Траєкторію руху смуги по внутрішній поверхні циліндра можна з деяким наближенням порівняти з рухом цупкої паперової стрічки, якщо її примусово подавати на нього в заданому напрямі під кутом γ (див. рис. 4.9,а).



а) б)

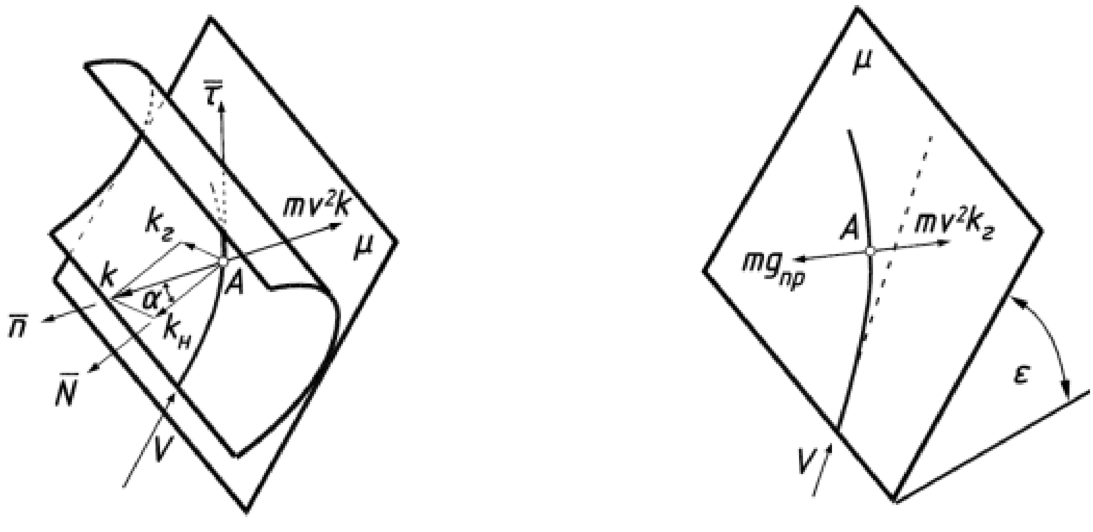
Рис. 4.9. До визначення напряму руху смуги по циліндричній поверхні:

а) імітація руху смуги по внутрішній поверхні паперовою стрічкою, яка перетинає всі твірні поверхні під сталим кутом γ;

б) геометричні розміри смуги та її нескінченно малий елемент у вигляді паралелепіпеда

Така стрічка перетинає всі твірні циліндра під кутом γ і описує на ньому геодезичну лінію. Реальна траєкторія смуги відрізнятиметься від описаної, оскільки під дією сили ваги вона відхилятиметься від геодезичної вниз по циліндру.

Рухаємо смугу зі сталою швидкістю V по циліндру. У такому випадку прискорення вздовж дотичної до траєкторії дорівнює нулю, а вздовж головної нормалі виникає доцентрове прискорення: $V^{2}k$ (див. рис. 4.9,б). Якщо крива (траєкторія руху частинки) розташована на поверхні, то частинка взаємодіє з нею, тиснучи з певною силою F. Сила тиску, як і реакція поверхні, завжди спрямована вздовж нормалі до поверхні $\bar{N}$, яка складає з головною нормаллю траєкторії $\bar{n}$ певний кут α (див. рис. 4.10,а). Її спричинюють складові ваги частинки, відцентрової сили, сили, що згинає смугу, якщо вона пружна, та інші, менш значимі. Якщо сила ваги не залежить від кривини траєкторії, то на останні дві складові кривина має суттєвий вплив.



а) б)

Рис. 4.10. Розкладання вектора кривини та сил, що діють на елемент смуги в точці A траєкторії його руху із швидкістю V:

а) розкладання кривини в нормальній площині траєкторії на складові вздовж нормалі до поверхні і на дотичну площину;

б) схема дії сил на елемент смуги в дотичній площині

Нехай елемент смуги знаходиться в точці A траєкторії (див. рис. 4.10,а).

Вектор кривини k спрямований по головній нормалі $\bar{n}$ траєкторії. Відцентрова сила $F_в=mV^2k$ спрямована в протилежну сторону. Її напрям не збігається із напрямом нормалі $\bar{N}$ до поверхні, тому вектор дії потрібно розкласти на складові вдовж нормалі до поверхні і на дотичну площину. Це рівносильно розкладанню кривини (нормальної $k_н$ та геодезичної $k_г$) по цих же напрямах. Кут α між нормаллю до поверхні і головною нормаллю траєкторії, через який здійснюється розкладання залежить від форми кривої на поверхні. У загальному випадку він є змінним і залежить від точки на кривій, так само, як і кривина ($\alpha=\alpha(s)$ і $k=k(s)$). Для геодезичної лінії кут α у всіх точках рівний нулю – головна нормаль кривої збігається із нормаллю до поверхні.

Припустимо, що пружність смуги мала, тобто вона практично не чинить опору згинанню. Тоді на елемент скиби розміром $a{\cdot}b{\cdot}ds$ (див. рис. 4.9,б) діють дві сили: сила ваги $dP=(a{\cdot}b{\cdot}ds){\cdot}\eta{\cdot}g=a{\cdot}b{\cdot}\eta{\cdot}g{\cdot}ds,$ де η – щільність ґрунту, g – прискорення вільного падіння і відцентрова сила $dF_в=mV^2k=a{\cdot}b{\cdot}\eta{\cdot}V^2k{\cdot}ds$. Обидві сили потрібно розкласти за напрямами (див. рис. 4.10,а). Складова відцентрової сили, що спроєктована на нормаль до поверхні, спричинює тиск елемента скиби на полицю. Її величину визначаємо з виразу: $dF_{вн}=a{\cdot}b{\cdot}\eta{\cdot}V^2k_н{\cdot}ds$. Вона врівноважується реакцією полиці. Друга складова $dF_{вг}=a{\cdot}b{\cdot}\eta{\cdot}V^2k_г{\cdot}ds$, спроєктована на дотичну площину, врівноважується проекцією сили ваги елемента скиби $mg_{пр}=a{\cdot}b{\cdot}\eta{\cdot}g{\cdot}ds_{пр}$ (див. рис. 4.10,б).

На рис. 4.10,б циліндричну поверхню показано умовно розігнутою на дотичну площину μ. Штриховою лінією показано слід середньої точки смуги, якби траєкторією її руху була геодезична лінія (на розгортці вона перетворюється у пряму). Це можливо було б при великій жорсткості смуги (на прикладі паперової стрічки). Однак смуга (особливо для окультурених ґрунтів) не чинить великого опору згинанню і складова ваги $mg_{пр}$ (див. рис. 4.10,б) відхиляє її в дотичній площині від прямолінійного напряму. Проте при збільшенні швидкості V руху смуги складова відцентрової сили $dF_{вг}=a{\cdot}b{\cdot}\eta{\cdot}V^2k_г{\cdot}ds$ зростає прямопропорційно квадрату швидкості. Тоді при незначному підвищенні швидкості складова відцентрової сили зростає суттєво. Оскільки величина складової сили ваги $mg_{пр}=a{\cdot}b{\cdot}\eta{\cdot}g{\cdot}ds_{пр}$, що її врівноважує, не залежить від швидкості, то наростаюча складова відцентрової сили намагається випрямити траєкторію руху елемента смуги, наближаючи її до геодезичної лінії. При нескінченному зростанні швидкості траєкторією руху смуги буде геодезична лінія. Таким чином, геодезичну лінію можна вважати за граничну траєкторію руху смуги, яка може бути для неї реальною у випадку великої швидкості її руху або абсолютно пружної смуги.

Розглянемо дію сил, коли смуга пружна і чинить певний опір згинанню. Смуга згинається у двох напрямах: в дотичній і нормальній площинах траєкторії. У цих площинах її опір згинанню буде різний і залежатиме від жорсткості смуги. Жорсткість залежить від геометричних розмірів перерізу смуги і визначається добутком модуля пружності E на момент інерції I перерізу смуги. Для нормальної і дотичної площин жорсткість відповідно запишеться $EI_{\text{н}} = \frac{Eab^3}{12}$ і $EI_{\text{г}} = \frac{Ea^3b}{12}$. Оскільки $a>b$, то жорсткість і, відповідно, опір згинанню смуги більший у дотичній площині, ніж у нормальній. Отже, ще одним чинником, що наближає траєкторію руху до геодезичної лінії полиці, є збільшення ширини смуги порівняно з її висотою.

Для знаходження сил, необхідних для згинання смуги в обох площинах, скористаємося відомим положенням теорії опору матеріалів, згідно якого кривина k пружної осі стержня (в нашому випадку смуги) прямопропорційна прикладеному моменту M і оберненопропорційна жорсткості EI стержня $\left(k = \frac{M}{EI}\right)$. Знайшовши момент M і продиференціювавши його по довжині пружної осі (по довжині траєкторії s), отримаємо силу, яка згинає смугу. Ще одне диференціювання дасть розподілену силу на одиницю довжини траєкторії. Отже, сила для згинання смуги $F_з$ по її довжині в межах полиці визначиться із формул:

- в нормальній площині: $F_{\text{зн}} = \frac{dM_{\text{н}}}{ds} = E\frac{ab^3}{12}\frac{dk_{\text{н}}}{ds}$; (4.48)

- в дотичній площині: $F_{\text{зг}} = \frac{dM_{\text{г}}}{ds} = E\frac{a^3b}{12}\frac{dk_{\text{г}}}{ds}$. (4.49)

Скиба тисне на полицю з силою (4.48), викликаючи силу тертя $fF_{зн}$, де f – коефіцієнт тертя скиби по полиці. Однак вона залежить від пружності смуги і може бути відсутня у випадку, коли скиба не чинить опору згинанню. Натомість нормальна складова відцентрової сили присутня завжди і не залежить від матеріалу смуги (за умови, що його щільність стала). Оскільки елементарна сила, з якою тисне елемент смуги на полицю, визначається із виразу $dF_{вн}=a\cdot b\cdot \eta\cdot V^2 k_н\cdot ds$, то для знаходження сумарної сили потрібно цей вираз проінтегрувати по довжині дуги s траєкторії. Приймаючи розміри перерізу смуги, швидкість її руху V і щільність матеріалу сталими, сила $F_{вн}$ визначиться із виразу:

$$F_{\text{вн}} = ab\eta V^2 \int k_{\text{н}} ds. \tag{4.50}$$

Сили (4.50) і (4.48) діють в напрямі нормалі до поверхні, тобто тиснуть на неї і спричинюють силу тертя. Вона залежить від нормальної кривини траєкторії руху смуги.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 4

1. Виведено формулу (4.17) для знаходження співвідношень конструктивних параметрів поверхні, утвореної гвинтовим коноїдом зі співвісним циліндром, які забезпечать необхідну швидкість транспортування матеріалу, при заданих коефіцієнтах тертя. Для запобігання пошкодження вантажу швидкість його руху не повинна перевищувати 2,5 м/с. Наприклад, при заданій швидкості V=2 м/с, $f=f_a$=0,3, β=30° із формули (4.17) знаходимо r=0,38 м.

2. Виведено залежність (4.28), за допомогою якої можна керувати формою криволінійної осі силосопроводу для транспортування подрібненої маси, яка забезпечує запобігання виникненню явища «залипання» матеріалу при зустрічі з поверхнею.

3. Досліджено рух матеріалу у вигляді суцільного середовища на прикладі гнучкої нестискуваної смуги прямокутного перерізу. Виведено формулу (4.47) для знаходження зусилля, необхідного для штовхання смуги вгору по внутрішній поверхні горизонтального циліндра при вступі смуги на поверхню циліндра перпендикулярно до його твірних. Подібна ситуація може виникнути при роботі бульдозера, для якого зусилля штовхання відіграють сили підпору. Виявлено значний вплив коефіцієнта тертя на величину сили штовхання. Зменшення шорсткості поверхні циліндра веде до зменшення коефіцієнта тертя і зусилля штовхання смуги.

4. Встановлено, що опір переміщенню смуги по поверхні циліндра при її вступі на його поверхню під кутом до твірних циліндра спричинюють сили, однією із яких є сила тертя. Складовими сили тертя є відцентрова сила і сила, що деформує пружну смугу. Обидві ці сили залежать від нормальної кривини траєкторії руху смуги по поверхні. При збільшенні швидкості руху смуги або збільшенні її пружності траєкторія руху смуги наближається до геодезичної лінії. У такому випадку сила опору залежатиме від сили на згинання смуги (4.48) і відцентрової сили (4.50), до виразів яких входить нормальна кривина осі смуги.

Матеріали даного розділу опубліковано у працях [133, 160, 165, 167, 172, 174, 225, 244].

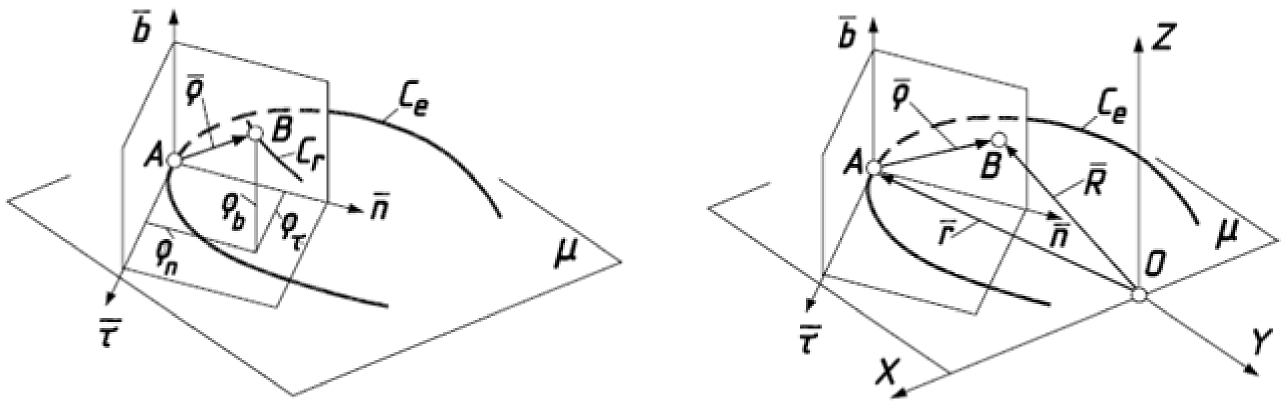
РОЗДІЛ 5
АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС РУХУ ЧАСТИНКИ ПО РУХОМИХ ПОВЕРХНЯХ У ФУНКЦІЇ ДОВЖИНИ ПРОЙДЕНОГО ШЛЯХУ

5.1. Рух частинки по похилій площині, яка обертається навколо вертикальної осі

Взаємодія частинок матеріалу із робочими рухомими поверхнями машин відбувається при різних технологічних процесах. У процесі такої взаємодії частинки змушені певним чином ковзати по поверхні у відносному русі і описувати певну траєкторію в абсолютному русі. Абсолютна траєкторія є геометричною сумою відносного руху ковзання частинки і переносного руху поверхні. Для додавання цих рухів зручно користуватися двома системами координат: рухомою, по відношенню до якої описується відносний рух частинки, і нерухомою, по відношенню до якої описується переносний рух поверхні і абсолютний рух частинки. У механіці розглядається спосіб описання руху точки і розкладання швидкості і прискорення на одиничні орти супровідного тригранника траєкторії, однак це стосується простого руху. Формою просторової кривої однозначно задається рух супровідного тригранника Френе, як твердого тіла. Рух тригранника може розглядатися як переносний, а рух точки в системі тригранника – як відносний. Така схема дозволяє застосувати широко відомі в диференціальній геометрії формули Френе і отримати нові цікаві результати.

Звідси виникає можливість застосування тригранника і формул Френе для аналітичного опису складного руху частинки по його площині, переносне переміщення якої задане плоскою напрямною кривою, вздовж якої рухається тригранник.

Оскільки формою просторової кривої однозначно задається рух супровідного тригранника Френе, то таким чином однозначно задається рух кожної з його граней. Якщо напрямна крива просторова, то закономірність руху тригранника залежить від двох диференціальних характеристик кривої: її кривини і скруту. Розглянемо спрощений варіант для плоскої кривої, у якої скрут дорівнює нулю. На рис. 5.1,а в площині μ розташована крива C_e, вздовж якої рухається супровідний тригранник $\overline{\tau}, \overline{n}, \overline{b}$. У цьому випадку стична площина тригранника, утворена ортами дотичної $\overline{\tau}$ і головної нормалі $\overline{n}$, збігається з площиною самої напрямної кривої.



а) б)

Рис. 5.1. Графічні ілюстрації до складання векторного рівняння руху точки B як геометричної суми переносного руху тригранника і відносного руху точки в триграннику:

а) супровідний тригранник $\overline{\tau}, \overline{n}, \overline{b}$ напрямної плоскої кривої C_e з позначеними координатами точки B в його системі;

б) схема до складання векторного рівняння положення точки B із урахуванням двох систем: $\overline{\tau}, \overline{n}, \overline{b}$ і $OXYZ$

При русі тригранника вздовж напрямної кривої C_e зі швидкістю V_e стична площина повертатиметься. Кут її повороту α визначається кутом повороту дотичної $\overline{\tau}$. При переміщенні тригранника по кривій на довжину її дуги Δs дотична повернеться на кут $\Delta\alpha$. Границя відношення $\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}$ при прямуванні Δs до нуля, є величиною кривини k кривої. З іншої сторони, границя $\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$, де Δt – час, за який відбувся поворот, дає величину кутової швидкості ω повороту стичної площини. Очевидно, що між кривиною k кривої і кутовою швидкістю ω повороту стичної площини існує взаємозв’язок. Його можна знайти:

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = kV_e. \tag{5.1}$$

Із залежності (5.1) випливає, що при сталих значеннях швидкості руху тригранника і кривини напрямної кривої (кола), кутова швидкість обертання стичної площини теж є сталою величиною.

Нехай частинка розташована на певній відстані ρ від вершини тригранника. Тоді її положення у векторному вигляді запишеться (див. рис. 5.1,б):

$$\overline{R} = \overline{r} + \overline{\rho}, \tag{5.2}$$

де $\overline{R}$ – радіус-вектор положення частинки в нерухомій системі $OXYZ$;
$\overline{r}$ – радіус-вектор точки на кривій, в якій знаходиться вершина A тригранника;
$\overline{\rho}$ – радіус-вектор положення частинки в системі тригранника.

Вважатимемо, що координати ρ_τ, ρ_n і ρ_b в системі тригранника є змінними і залежними від його положення на кривій C_e – від довжини дуги s напрямної кривої. У такому випадку при русі тригранника по кривій точка B певним чином рухатиметься в його системі, описуючи відносну траєкторію C_r (див. рис. 5.1,а). Сума переносного руху тригранника і відносного руху точки в системі тригранника дасть абсолютну траєкторію точки B. Перепишемо вираз (5.2) із урахуванням розкладання вектора $\overline{\rho}$ на орти тригранника:

$$\overline{R} = \overline{r} + \overline{\tau}\rho_\tau + \overline{n}\rho_n + \overline{b}\rho_b. \tag{5.3}$$

Щоб знайти абсолютну швидкість руху частинки V_a, потрібно векторне рівняння (5.3) продиференціювати по часу t. Застосування тригранника Френе дає можливість використати формули Френе, широко відомі у диференціальній геометрії. Вони дозволяють просто знаходити похідні ортів тригранника в проекціях на ці ж орти. Однак у цьому випадку незалежною змінною має бути довжина дуги s – шляху, який проходить вершина тригранника, рухаючись по кривій C_e. Приймаючи s за незалежну змінну, знайдемо взаємозв’язок між абсолютною швидкістю V_a і похідною вектора $\overline{R}$ по змінній s:

$$V_a = \frac{d\overline{R}}{dt} = \frac{d\overline{R}}{ds}\frac{ds}{dt} = V_e\frac{d\overline{R}}{ds}. \tag{5.4}$$

Таким чином, щоб отримати вираз абсолютної швидкості V_a, потрібно швидкість V_e переносного руху тригранника по кривій C_e помножити на похідну виразу (5.3). З таких же міркувань може бути знайдена і відносна швидкість V_r:

$$V_r = \frac{d\overline{\rho}}{dt} = \frac{d\overline{\rho}}{ds}\frac{ds}{dt} = V_e\frac{d\overline{\rho}}{ds}. \tag{5.5}$$

Продиференціюємо векторний вираз (5.3) по змінній s, маючи на увазі, що $\rho_\tau=\rho_\tau(s)$, $\rho_n=\rho_n(s)$ і $\rho_b=\rho_b(s)$:

$$\frac{d\overline{R}}{ds} = \frac{d\overline{r}}{ds} + \left(\frac{d\overline{\tau}}{ds}\rho_\tau + \overline{\tau}\frac{d\rho_\tau}{ds}\right) + \left(\frac{d\overline{n}}{ds}\rho_n + \overline{n}\frac{d\rho_n}{ds}\right) + \left(\frac{d\overline{b}}{ds}\rho_b + \overline{b}\frac{d\rho_b}{ds}\right). \tag{5.6}$$

Похідні $\frac{d\overline{r}}{ds}, \frac{d\overline{\tau}}{ds}, \frac{d\overline{n}}{ds}, \frac{d\overline{b}}{ds}$ згідно формул Френе розписуються в проекціях на орти тригранника через кривину k і скрут σ напрямної кривої. Формули Френе мають наступний вигляд:

$$\begin{gathered} \overline{r'} = \overline{\tau}; \\ \overline{r'} = k\overline{n}; \\ \overline{n'} = \sigma\overline{b} - k\overline{\tau}, \\ \overline{b'} = \sigma\overline{n}. \end{gathered} \tag{5.7}$$

Напрямна крива C_e є плоскою кривою (скрут $\sigma=0$). З урахуванням цього підставимо формули (5.7) у вираз (5.6) і після групування проекцій по ортах $\overline{\tau}, \overline{n}, \overline{b}$ отримаємо:

$$\begin{aligned}\overline{R'} &= \overline{\tau} + \overline{n}k\rho_\tau + \overline{\tau}\rho_\tau^{'} - \overline{\tau}k\rho_n + \overline{n}\rho_n^{'} + \overline{b}\rho_b^{'} = \\ &= \overline{\tau}(1 + \rho_\tau^{'} - k\rho_n) + \overline{n}(\rho_n^{'} + k\rho_\tau) + \overline{b}\rho_b^{'}.\end{aligned} \tag{5.8}$$

Вираз абсолютного прискорення w отримаємо диференціюванням абсолютної швидкості (5.4) по часу t при умові, що $V_e=const$:

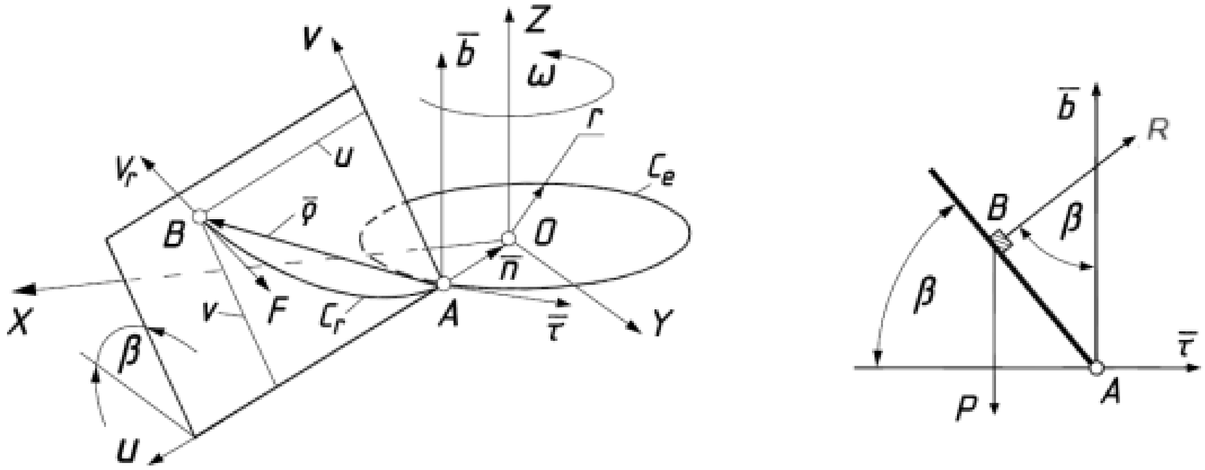
$$w = \frac{d}{dt}\left(V_e\frac{d\overline{R}}{ds}\right) = V_e^{\,2}\frac{d^2\overline{R}}{ds^2}. \tag{5.9}$$

Другу похідну $\overline{R"}$ знаходимо диференціюванням векторного виразу (5.8) по змінній s із застосуванням формул Френе. В загальному випадку кривина k є змінною величиною ($k=k(s)$) і при диференціюванні це потрібно враховувати.

Точка рухається по похилій площині, розташованій у триграннику, який рухається по колу радіуса r (див. рис. 5.2,а). У такому випадку похила площина здійснює обертальний рух навколо осі OZ із кутовою швидкістю ω. Переносна швидкість V_e руху тригранника відповідно до (5.1) запишеться: $V_e = \frac{\omega}{k}$. Кривина k кола є сталою величиною $\left(k = \frac{1}{r}\right)$, тому $V_e = \omega r$. Оскільки k=const, диференціювання виразу (5.8) спрощується:

$$\begin{aligned}\overline{R"} &= \overline{\tau'}(1 + \rho'_\tau - k\rho_n) + \overline{\tau}(\rho"_\tau - k\rho'_n) + \overline{n'}(\rho'_n + k\rho_\tau) + \overline{n}(\rho"_n + k\rho'_\tau) \\ &\quad + \overline{b}'\rho'_b + \overline{b}\rho"_b \\ &= \overline{\tau}[\rho"_\tau - k(k\rho_\tau + 2\rho'_n)] + \overline{n}[\rho"_n + k(1 - k\rho_n + 2\rho'_\tau)] + \overline{b}\rho"_b.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Векторний вираз (5.10) дає другу похідну $\overline{R''}$ по дуговій координаті s в проекціях на орти тригранника. При його отриманні були використані формули Френе (5.7) і складові після диференціювання були згруповані по ортах тригранника.



а) б)

Рис. 5.2. Графічні ілюстрації до складання диференціальних рівнянь руху точки B по похилій площині, розташованій у системі тригранника:

а) супровідний тригранник $\overline{\tau}, \overline{n}, \overline{b}$ напрямного кола C_e радіуса r із позначеними координатами точки B на похилій площині;

б) позначення діючих на частинку сил в системі тригранника, коли орт головної нормалі $\overline{n}$ проекціюється в точку, а похила площина – в пряму лінію

На похилій площині скористаємося місцевою системою координат, у якої одна вісь u збігається з ортом головної нормалі $\overline{n}$ і спрямована у протилежну сторону, а друга v перпендикулярна до u (див. рис. 5.2,а). У такому випадку $\rho_n(s)=-u(s)$. Для двох інших координат $\rho_\tau=\rho_\tau(s)$ і $\rho_b=\rho_b(s)$ можна записати відповідно до рис. 5.2,б: $-\frac{\rho_\tau}{v} = \cos\beta$ і $\frac{\rho_b}{v} = \sin\beta$. Таким чином $\rho_\tau(s)=-v(s)\cdot\cos\beta$ і $\rho_b(s)=v(s)\cdot\sin\beta$. Отже, перші і другі похідні вектора $\overline{\rho}$ в проекціях на орти тригранника запишуться: $\rho'_\tau=-v'\cdot\cos\beta$, $\rho''_\tau=-v''\cdot\cos\beta$, $\rho'_n=-u'$, $\rho''_n=-u''$, $\rho'_b=v'\cdot\sin\beta$, $\rho''_b=v''\cdot\sin\beta$. Після підстановки цих виразів у (5.10) і множення отриманих результатів на V_e^2 ($V_e=\omega\cdot r$) згідно (5.9), запишемо вирази абсолютного прискорення точки B в проекціях на орти тригранника:

$$w_\tau = \omega^2 r^2[-v''\cos\beta + k(kv\cos\beta + 2u')];$$
$$w_n = \omega^2 r^2[-u'' + k(1 + ku - 2v'\cos\beta)]; \qquad (5.11)$$
$$w_b = \omega^2 r^2 v''\sin\beta.$$

Якщо задати дві залежності $u=u(s)$ і $v=v(s)$ – траєкторію ковзання точки B по площині, то за формулами (5.4) можна знайти закон зміни її абсолютного прискорення в проекціях на орти тригранника. Розв’яжемо обернену задачу – знаходження закону відносного руху частинки, яка рухається під дією прикладених до неї сил.

Диференціальне рівняння абсолютного руху частинки у векторному записі має вигляд (2.3). Розглянемо напрям кожної з прикладених до частинки сил. Сила ваги $P=mg$ спрямована вниз – в протилежну сторону напряму орта бінормалі $\bar{b}$. Її одиничний напрямний вектор в системі тригранника запишеться:

$$[0, \quad 0, \quad -1]. \qquad (5.12)$$

Одиничний напрямний вектор реакції площини проекціюється на орти $\bar{\tau}$ і $\bar{b}$. Згідно рис. 5.2,б його проекції на орти тригранника мають вигляд:

$$[\sin\beta, \quad 0, \quad \cos\beta]. \qquad (5.13)$$

Сила тертя спрямована в протилежну сторону швидкості V_r ковзання частинки. Згідно (5.5) її знаходимо множенням модуля вектора $\bar{\rho}$ на величину переносної швидкості $V_e=\omega\cdot r$:

$$V_r = \omega r\sqrt{\rho_\tau'^2 + \rho_n'^2 + \rho_b'^2} = \omega r\sqrt{u'^2 + v'^2}. \qquad (5.14)$$

Проекції одиничного напрямного вектора дії сили тертя F знайдемо діленням складових швидкості на її величину:

$$\left[\frac{v'\cos\beta}{\sqrt{u'^2+v'^2}}, \quad \frac{u'}{\sqrt{u'^2+v'^2}}, \quad -\frac{v'\sin\beta}{\sqrt{u'^2+v'^2}}\right]. \tag{5.15}$$

Векторне рівняння (2.3) в проекціях на орти тригранника запишеться:

$$\begin{aligned} mw_\tau &= F_\tau; \\ mw_n &= F_n; \\ mw_b &= F_b. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Після підстановки у рівняння (5.16) виразів абсолютного прискорення (5.11), сили ваги $P=mg$, реакції R площини, сили тертя $F=f{\cdot}R$ згідно напрямних векторів (5.12), (5.13) і (5.15) отримаємо систему трьох диференціальних рівнянь з трьома невідомими функціями $u=u(s)$, $v=v(s)$ і $R=R(s)$:

$$\begin{aligned} & m\omega^2 r^2[-v''\cos\beta + k(kv\cos\beta + 2u')] = R\sin\beta + fR\frac{v'\cos\beta}{\sqrt{u'^2+v'^2}}; \\ & m\omega^2 r^2[-u'' + k(1 + ku - 2v'\cos\beta)] = fR\frac{u'}{\sqrt{u'^2+v'^2}}; \\ & m\omega^2 r^2 v''\sin\beta = -mg + R\cos\beta - fR\frac{v'\sin\beta}{\sqrt{u'^2+v'^2}}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Розв'яжемо систему (5.17) відносно $u''=u''(s)$, $v''=v''(s)$ і $R=R(s)$:

$$u'' = \frac{1}{r^2}(r + u - 2rv'\cos\beta) - \frac{fu'}{r\sqrt{u'^2+v'^2}}\left[\frac{g}{r\omega^2}\cos\beta + \sin\beta\left(2u' + \frac{v}{r}\cos\beta\right)\right]; \tag{5.18}$$

$$v'' = \frac{\cos\beta}{r}\left(2u' + \frac{v}{r}\cos\beta\right) - \frac{g\sin\beta}{r^2\omega^2}$$
$$- \frac{fv'}{r\sqrt{u'^2 + v'^2}}\left[\frac{g}{r\omega^2}\cos\beta + \sin\beta\left(2u' + \frac{v}{r}\cos\beta\right)\right]; \quad (5.19)$$

$$R = m\left[g\cos\beta + r\omega^2\sin\beta\left(2u' + \frac{v}{r}\cos\beta\right)\right]. \quad (5.20)$$

Оскільки k і r є взаємно обернені величини, то в отриманих результатах (5.18), (5.19) і (5.20) доцільно перейти до більш звичної величини – радіуса r напрямного кола. Диференціальні рівняння (5.18) і (5.19) складають систему з двома невідомими залежностями: *u=u(s)* і *v=v(s)*. Вони визначають відносну траєкторію ковзання частинки по площині. Для їх знаходження потрібно застосовувати чисельні методи. Після цього стає відомою залежність (5.20) сили реакції R площини.

Розглянемо часткові випадки положення площини. Для абсолютно гладенької вертикальної площини ($\beta=90^o$ і $f=0$), що обертається, диференціальні рівняння (5.18), (5.19) приймають вигляд:

$$u'' = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{u}{r}\right);$$
$$v'' = -\frac{g}{r^2\omega^2}. \quad (5.21)$$

Кожне із рівнянь (5.21) є самостійним і має розв'язок при умові, що в початковий момент переносного руху тригранника (при $s=0$) відносна швидкість і шлях ковзання частинки теж рівні нулю:

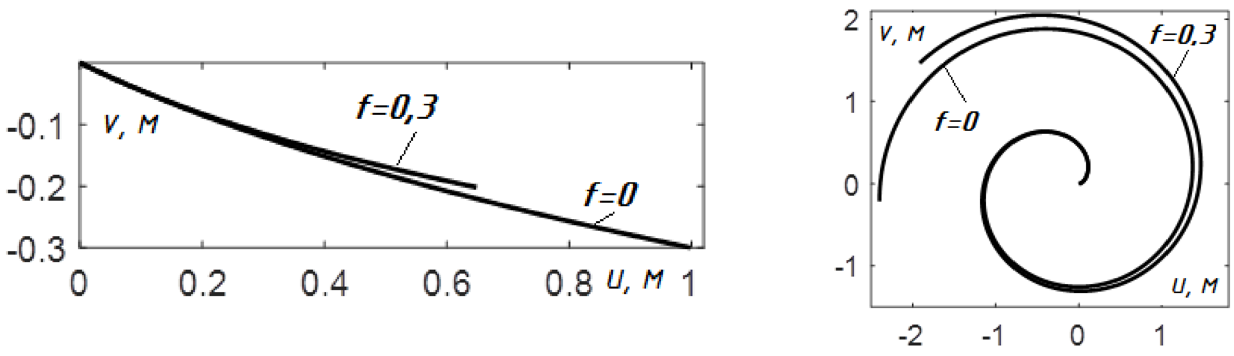
$$u = 2r\sinh^2\frac{s}{2r};$$
$$v = -\frac{gs^2}{2r^2\omega^2}. \quad (5.22)$$

Рівняння (5.22) є параметричними рівняннями траєкторії ковзання частинки по вертикальній площині при її обертанні за відсутності тертя. При русі тригранника по колу радіуса r існує зв'язок між шляхом s і відповідним часом його проходження t: $s=r\omega t$. Підстановка цього виразу у (5.22) дає параметричні рівняння траєкторії у функції часу:

$$u = 2r\sinh^2\frac{\omega}{2}t;$$
$$v = -\frac{g}{2}t^2. \tag{5.23}$$

Залежність *v=v(t)* у другому рівнянні (5.23) є відомою формулою вільного падіння тіла. Таким чином, у вертикальному напрямі частинка рухається за законом вільного падіння, а у горизонтальному – відповідно першого рівняння (5.23) тобто залежить від радіуса r і кутової швидкості ω.

На рис. 5.3,а за рівняннями (5.23) побудовано траєкторії ковзання частинки при $r=0{,}2$ *м*, $\omega=10$ $с^{-1}$ (для $f=0$) і чисельними методами для $f=0{,}3$. На рис. 5.3,б при тих же параметрах побудовано траєкторії ковзання частинки по горизонтальній площині (при $\beta=0°$).



а) б)

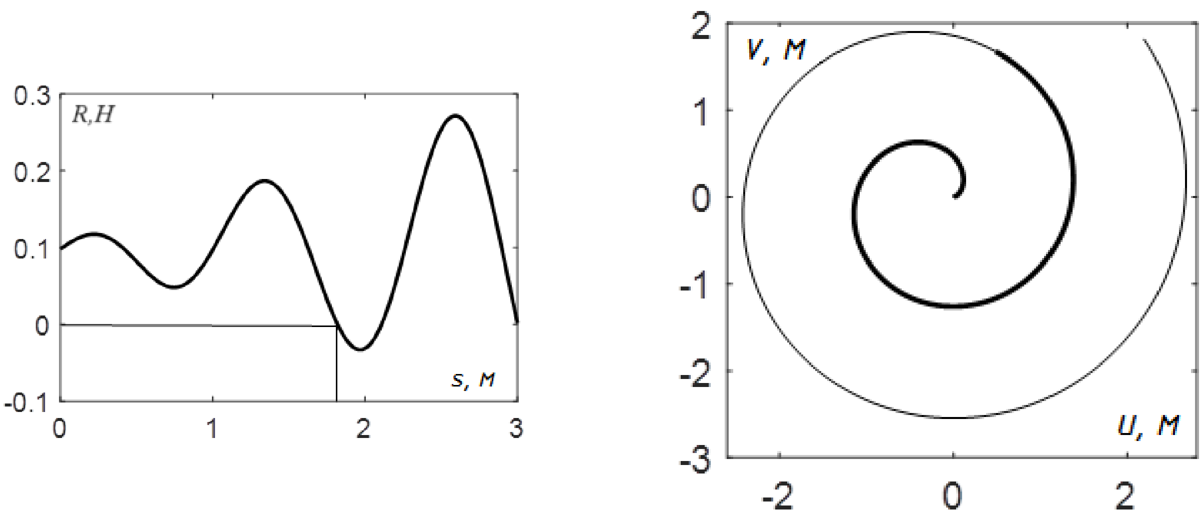
Рис. 5.3. Траєкторії ковзання частинки по площині, яка обертається з кутовою швидкістю $\omega=10$ $с^{-1}$ при $r=0{,}2$ *м*:

а) площина вертикальна ($\beta=90°$);

б) площина горизонтальна ($\beta=0°$)

При зростанні кутової швидкості обертання площини у першому випадку (див. рис. 5.3,а) зміна траєкторії ковзання відбувається у її наближенні до горизонтальної прямої, а у другому (див. рис. 5.3,б) – в ущільненні витків спіралі. Ці положення площини є граничними серед усіх можливих положень її розташування. У зв’язку з цим виникає питання: при яких кутах нахилу площини і як саме відбувається перехід траєкторії ковзання від спіралі до лінії, що наближається до прямої.

Суттєвий вплив на характер ковзання частинки має реакція R площини. Згідно виразу (5.20) вона є сталою при $\beta=0°$ – при горизонтальному розташуванні площини. Але вже навіть при нахилі площини на $1°$ ($\beta=1°$) реакція поверхні набуває знакозмінного характеру (див. рис. 5.4,а). У момент часу, що відповідає значенню $s=1,8$ *м*, реакція R стає рівною нулю. Відповідна ділянка траєкторії ковзання частинки до цього моменту зображена потовщеною лінією (див. рис. 5.4,б).



а) б)

Рис. 5.4. Графічні ілюстрації до ковзання частинки масою $m=0,01$ *кг* по площині, яка обертається з кутовою швидкістю $\omega=20$ c^{-1} при $r=0,2$ *м*, $\beta=1°$, $f=0,3$:

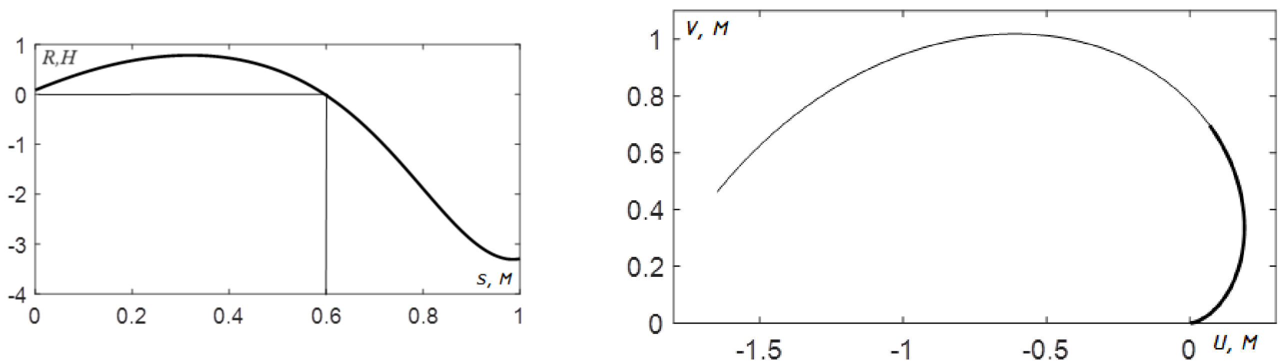
а) графік зміни реакції R площини;

б) траєкторія ковзання частинки

Продовження траєкторії руху частинки тонкою лінією відповідає умові, що вона знаходиться між двома площинами і реакцію чинить уже інша площина.

Оскільки площина одна, в момент закінчення потовщеної траєкторії відбуватиметься відрив частинки, тобто подальший її рух стає непередбачуваним. Відірвавшись від площини, частинка втрачає швидкість і знову попадає на площину. Процес розгону частинки повторюється до наступного її відриву від площини. Можна висловити припущення, що частинку на похилій площині не вдасться перемістити на велику відстань від осі обертання, як це можна зробити на горизонтальній площині.

Із рис. 5.4,б видно, що частинка зробила один повний виток і при підйомі на другому витку відривається від площини. Це пояснюється тим, що вектор відцентрової сили в цей момент має вертикальну складову, яка врівноважує вагу частинки. Якщо збільшити кут нахилу β площини, то відрив відбувається раніше – уже при підйомі частинки на першому витку. На рис. 5.5 показано такі ж графічні ілюстрації, як і на рис. 5.4 з однією тільки різницею – кут нахилу площини $\beta=30°$.

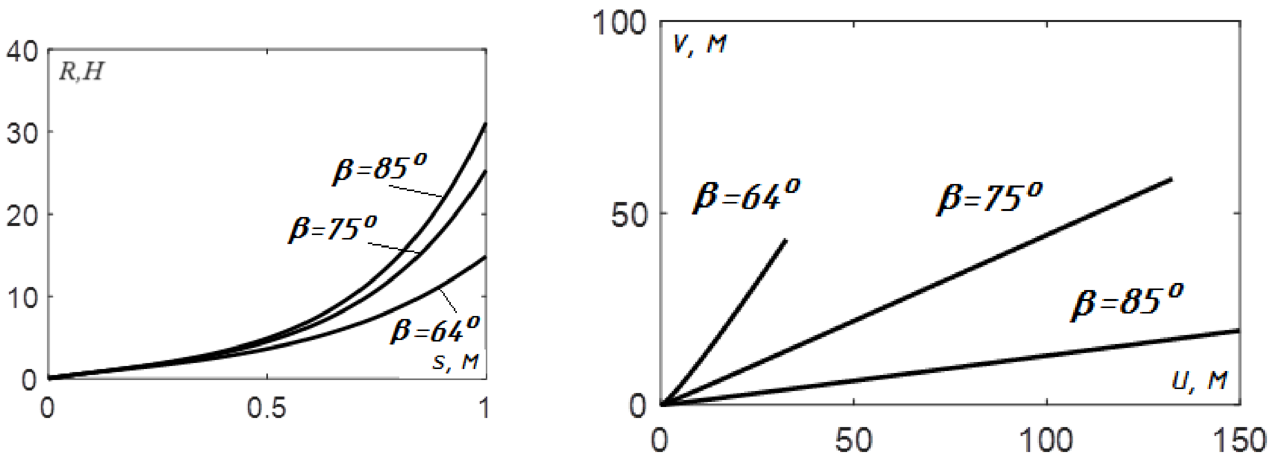


а) б)

Рис. 5.5. Графічні ілюстрації до ковзання частинки масою $m=0{,}01$ *кг* по площині, яка обертається з кутовою швидкістю $\omega=20$ $с^{-1}$ при $r=0{,}2$ *м*, $\beta=30°$, $f=0{,}3$:
а) графік зміни реакції R площини;
б) траєкторія ковзання частинки

Подібна ситуація відбувається при збільшенні кута нахилу площини до 63°. При подальшому збільшенні кута β реакція площини не набуває від'ємних значень, вона монотонно зростає – відриву частинки від площини не буде. Про це свідчать графіки зміни сили реакції площини для різних значень її нахилу (див. рис. 5.6,а). При цьому траєкторія ковзання частинки практично є прямою лінією. По мірі збільшення кута нахилу площини ця траєкторія все більше наближається до горизонтальної прямої (див. рис. 5.6,б). Коли площина стає вертикальною (при $\beta=90°$), траєкторія починає відхилятися від горизонтального напряму вниз (див. рис. 5.3,а).

Таким чином, проведені дослідження дають можливість прослідкувати трансформацію траєкторії ковзання частинки по площині по мірі збільшення кута її нахилу. Коли площина горизонтальна ($\beta=0°$), частинка буде описувати у відносному русі спіраль, віддаляючись від осі обертання на яку завгодно відстань. Коли площину нахиляти, то існують межі кута β, при яких частинка може відриватися від площини, тобто її переміщення від осі обертання буде обмеженим. Відрив відбувається при підйомі частинки по площині. При подоланні умовного значення кута β, величина якого залежить від коефіцієнта тертя f, кутової швидкості обертання площини ω (для розглянутого випадку $\beta\approx63°$) частинка уже не відривається від площини, а її траєкторія ковзання наближається до прямої лінії.



а) б)

Рис. 5.6. Графічні ілюстрації до ковзання частинки масою $m=0{,}01$ *кг* по площині, яка обертається із кутовою швидкістю $\omega=20$ $с^{-1}$ при $r=0{,}2$ *м*, $f=0{,}3$ і різних кутах β нахилу площини:

а) графік зміни реакції R площини;

б) траєкторія ковзання частинки

Слід відмітити, що такі зміни вдається виявити на площині доволі великих розмірів. При невеликих розмірах площини, співрозмірних із розмірами робочих лопаток розсіювальних апаратів відцентрового типу, спостерігаються початкові ділянки відносних траєкторій, що мають криволінійну форму.

5.2. Складний рух частинки по горизонтальній площині, переміщення якої задане криволінійною траєкторією

Розглянемо аналогічний випадок, який відрізняється тим, що переміщення площини, яка є стичною для тригранника Френе, відбувається не по колу, а по кривій змінної кривини. Якщо траєкторією переносного руху тригранника із площиною в ньому є коло, то площина здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі. Якщо переносною траєкторією руху тригранника є крива змінної кривини, то переміщення площини можна розкласти на дві складові: обертальну і поступальну. В цьому випадку виявляється ефективність застосування тригранника і формул Френе для аналітичного опису складного руху матеріальної точки по його площині, переносне переміщення якої задане плоскою напрямною кривою, вздовж якої рухається тригранник. Такий підхід дає можливість задавати переносний рух стичної площини тригранника по кривій зі змінною кривиною, розширивши клас задач на складний рух точки, при якому обертальний рух навколо нерухомої осі є частковим випадком. Прикладом такої задачі може бути знаходження відносного руху вантажу у кузові автомобіля, що рухається по дорозі з криволінійною віссю змінної кривини.

Оскільки дослідження руху точки проводиться в горизонтальній (стичній) площині тригранника, то ρ_b=ρ'_b=0. Враховуючи це і підставивши вирази похідних (5.7) у (5.6), після групування проекцій по ортах $\overline{\tau}, \overline{n}, \overline{b}$ отримаємо:

$$\overline{R'} = \overline{\tau} + \overline{n}k\rho_\tau + \overline{\tau}\rho_\tau' - \overline{\tau}k\rho_n + \overline{n}\rho_n' = \overline{\tau}(1 + \rho_\tau' - k\rho_n) + \overline{n}(\rho_n' + k\rho_\tau). \qquad (5.24)$$

Другу похідну $\overline{R''}$ знаходимо диференціюванням векторного виразу (5.24) по змінній s із застосуванням формул Френе (5.7), маючи на увазі, що кривина $k=k(s)$ є змінною величиною. Отримані вирази групуємо по ортах тригранника:

$$\begin{aligned} R'' = \overline{\tau'}(1+\rho_\tau' - k\rho_n) + \overline{\tau}(\rho_\tau'' - k'\rho_n - k\rho_n') + \overline{n'}(\rho_n' + k\rho_\tau) \\ + \overline{n}(\rho_n'' + k'\rho_\tau + k\rho_\tau') = \\ = \overline{\tau}[\rho_\tau'' - k'\rho_n - k(k\rho_\tau + 2\rho_n')] \\ + \overline{n}[\rho_n'' - k'\rho_\tau + k(1 - k\rho_n + 2\rho_\tau')]. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Після множення отриманих результатів (5.25) на ${V_e}^2$ згідно (5.9), запишемо вирази абсолютного прискорення точки B в проекціях на орти тригранника:

$$\begin{aligned} w_\tau &= V_e^2[\rho_\tau'' - k'\rho_n - k(k\rho_\tau + 2\rho_n')]; \\ w_n &= V_e^2[\rho_n'' - k'\rho_\tau + k(1 - k\rho_n + 2\rho_\tau')]. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Щоб знайти величину абсолютного прискорення точки, яка рухається в стичній площині тригранника, а сам тригранник рухається про кривій, необхідно задати швидкість його руху V_e, параметричні рівняння напрямної кривої $x=x(s)$ і $y=y(s)$ і закон руху точки $\rho_\tau=\rho_\tau(s)$, $\rho_n=\rho_n(s)$. Кривину $k=k(s)$ напрямної кривої C_e знаходять за відомою формулою (5.28).

Складнішою є обернена задача – знаходження закону відносного руху частинки, яка рухається під дією прикладених до неї сил. Будемо вважати, що стична площина представляє собою кузов вантажного автомобіля, який рухається зі сталою швидкістю V_e по горизонтальній дорозі з криволінійною віссю у вигляді напрямної кривої. Роль частинки відіграватиме вантаж у кузові автомобіля. Потрібно знайти траєкторію та величину швидкості можливого ковзання вантажу в кузові.

Вісь дороги (криву C_e) задамо параметричними рівняннями:

$$x = 2a \cdot \operatorname{Arctg}\left(\frac{s}{a}\right) - s;$$
$$y = a \cdot \ln\left(\frac{a^2 + s^2}{a^2}\right). \tag{5.27}$$

Кривину k кривої, заданої параметричними рівняннями у функції довжини дуги s, знаходимо за формулою:

$$k = \sqrt{x''^2 + y''^2}. \tag{5.28}$$

Після підстановки у (5.28) других похідних рівнянь (5.27), знаходимо вираз кривини k і його першу похідну k':

$$k = \frac{2a}{a^2 + s^2};$$
$$k' = -\frac{4as}{(a^2 + s^2)^2}. \tag{5.29}$$

Розглянемо прикладені до частинки сили. Сила ваги mg спрямована вниз, тобто в протилежну сторону напряму орта бінормалі $\bar{b}$. Вона врівноважується реакцією R днища автомобіля, спрямованою вгору. Таким чином, можна записати: $R=mg$. Сила тертя має сталу величину: $F=f \cdot m \cdot g$. Вона спрямована в протилежну сторону швидкості V_r ковзання частинки, яка знаходиться в точці B. На рис. 5.7 крива C_e зображена на вигляді зверху, коли бінормаль $\bar{b}$ проекціюється в точку. Прямокутне днище автомобіля зафарбоване в сірий колір і утворене при від'ємних значеннях ортів $\bar{\tau}$ і $\bar{n}$ тригранника. Таке його розташування відповідає ймовірній траєкторії ковзання вантажу, оскільки відцентрова сила, що зумовлює його ковзання, спрямована від центру кривини напрямної кривої.

Знайдемо одиничний напрямний вектор дії сили тертя F. Проекції відносної швидкості частинки на орти тригранника знайдемо множенням похідних радіус-вектора $\overline{\rho}$ на швидкість V_e. Отже, проекції відносної швидкості V_r ковзання і її величина запишуться:

$$V_{r\tau} = V_e \rho_\tau';$$
$$V_{rn} = V_e \rho_n';\qquad (5.30)$$
$$V_r = V_e \sqrt{\rho_\tau'^2 + \rho_n'^2}.$$

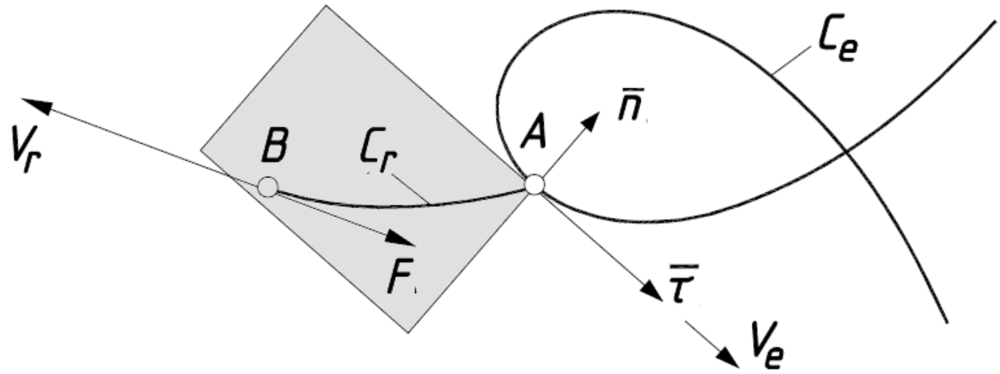


Рис. 5.7. Схема переміщення кузова автомобіля вздовж криволінійної ділянки шляху з векторами переносної V_e, відносної V_r швидкостей і сили тертя F

Розкладемо силу тертя $F=fmg$ на орти тригранника з урахуванням її напряму та у відповідності зі співвідношенням проекцій (5.30):

$$F_\tau = -fmg \frac{\rho_\tau'}{\sqrt{\rho_\tau'^2 + \rho_n'^2}};$$
$$F_n = -fmg \frac{\rho_n'}{\sqrt{\rho_\tau'^2 + \rho_n'^2}}.\qquad (5.31)$$

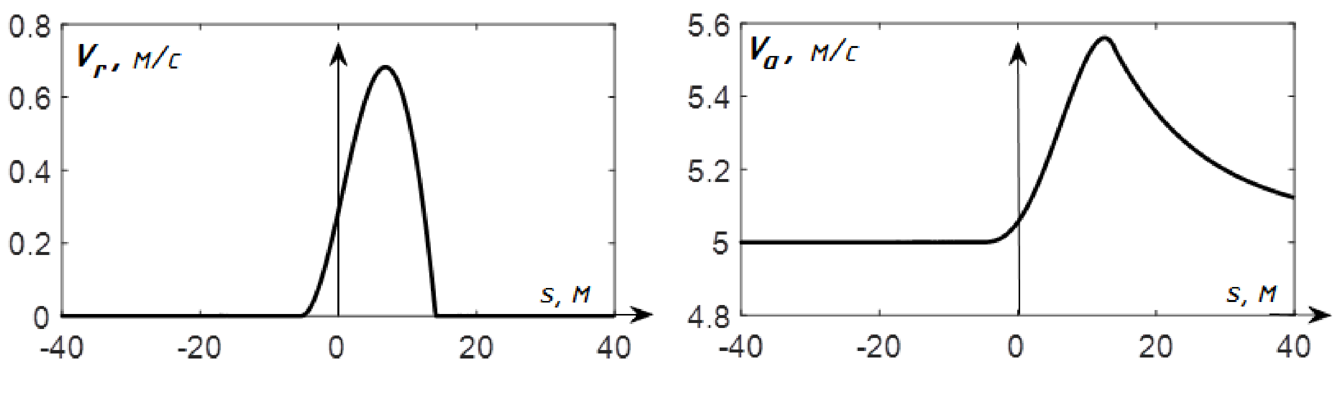
Векторне рівняння (2.3) в проекціях на орти тригранника запишеться:

$$mw_\tau = F_\tau;$$
$$mw_n = F_n. \tag{5.32}$$

Після підстановки у рівняння (5.32) виразів абсолютного прискорення (5.26), сили тертя F (5.31) і після скорочення на масу m отримаємо систему двох диференціальних рівнянь з двома невідомими функціями $\rho_\tau=\rho_\tau(s)$ і $\rho_n=\rho_n(s)$:

$$V_e^2(\rho_\tau'' - k'\rho_n - k^2\rho_\tau - 2k\rho_n') = -fg \cdot \frac{\rho_\tau'}{\sqrt{\rho_\tau'^2 + \rho_n'^2}};$$
$$V_e^2(\rho_n'' + k + k'\rho_\tau - k^2\rho_n + 2k\rho') = -fg \cdot \frac{\rho_n'}{\sqrt{\rho_\tau'^2 + \rho_n'^2}}. \tag{5.33}$$

Графічне представлення результатів чисельного інтегрування системи (5.33) показано на рис. 5.8. Інтегрування здійснювалося при зміні дугової координати s від *-40 м* до *40 м*. Прийняті значення постійних: $a=15$; $f=0,3$; $V_e=5$ *м/с*. На рис. 5.8 побудовано графіки зміни відносної і абсолютної швидкості руху вантажу.



а) б)

Рис. 5.8. Графіки зміни швидкостей руху вантажу в кузові автомобіля:

а) відносний рух;

б) абсолютний рух

Із рис. 5.8,а видно, що ковзання вантажу почалося приблизно при $s\approx$*-5,5 м* і закінчилося при $s\approx$*14 м*, при цьому максимальна відносна швидкість досягла значення $V_r\approx 0,7$ *м/с*. Значення дугової координати s, при якому почався відносний рух, можна визначити аналітичним шляхом. Ковзання вантажу почнеться тоді, коли відцентрова сила $F_c = mV_e^2k$ перевищить силу тертя $F=fmg$. Прирівнявши ці сили і підставивши вираз $k=k(s)$ із (5.3), одержимо граничне значення дугової координати s:

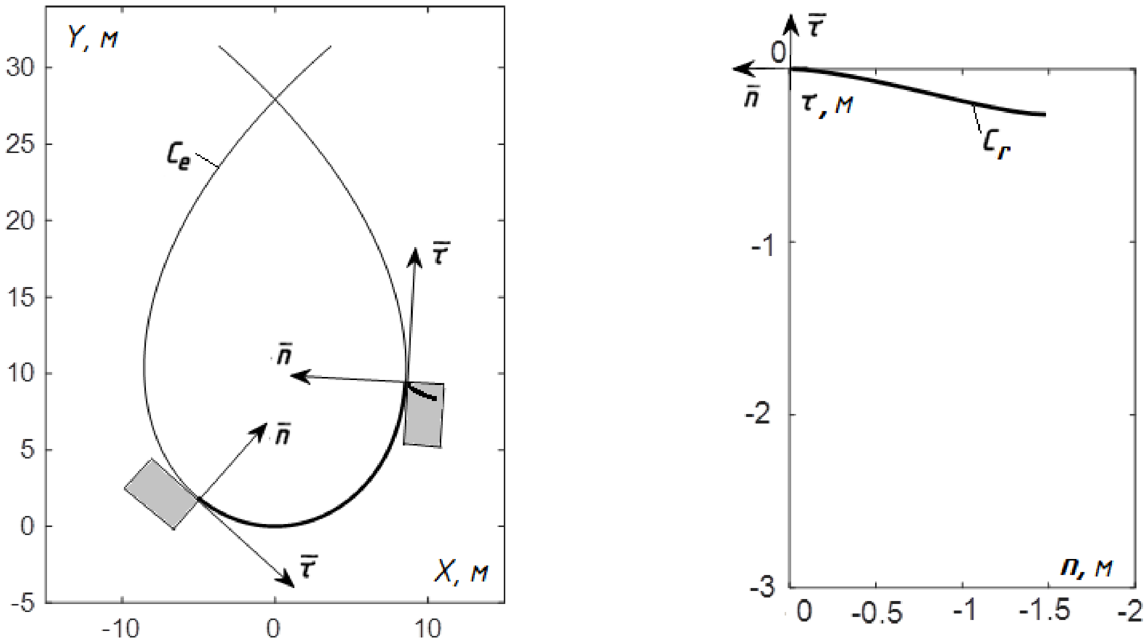
$$\frac{m\cdot V_e^2\cdot 2a}{a^2+s^2}=fmg,\text{звідки}$$

$$s=\sqrt{\frac{a}{fg}(2V_e^2-afg)}. \qquad (5.34)$$

Розв’язок рівняння (5.34) при зазначених постійних показує, що відносний рух вантажу почнеться при $s>$*-5,46 м*. Максимальна абсолютна швидкість руху вантажу досягається при $s\approx$*14 м*. У цей момент ковзання вантажу припиняється і абсолютна його швидкість починає зменшуватися (див. рис. 5.8,б).

На рис. 5.9,а в масштабі побудована напрямна крива C_e, на якій потовщеною лінією виділено ділянку, при русі по якій стичної площини тригранника (днища кузова автомобіля) відбувалося ковзання вантажу. Сам кузов у збільшеному масштабі показаний на рис. 5.9,б, на якому побудовано траєкторію C_r ковзання вантажу. З нього видно, що вантаж у кузові змістився приблизно на *1,5 м* в сторону протилежного борта і приблизно на *0,25 м* в сторону, протилежну напряму руху.

Траєкторія і швидкість ковзання вантажу значною мірою залежать від коефіцієнта тертя і швидкості руху автомобіля. На рис. 5.10 побудовано графіки зміни швидкості ковзання і траєкторії руху вантажу в кузові автомобіля для різних значень коефіцієнта тертя f.

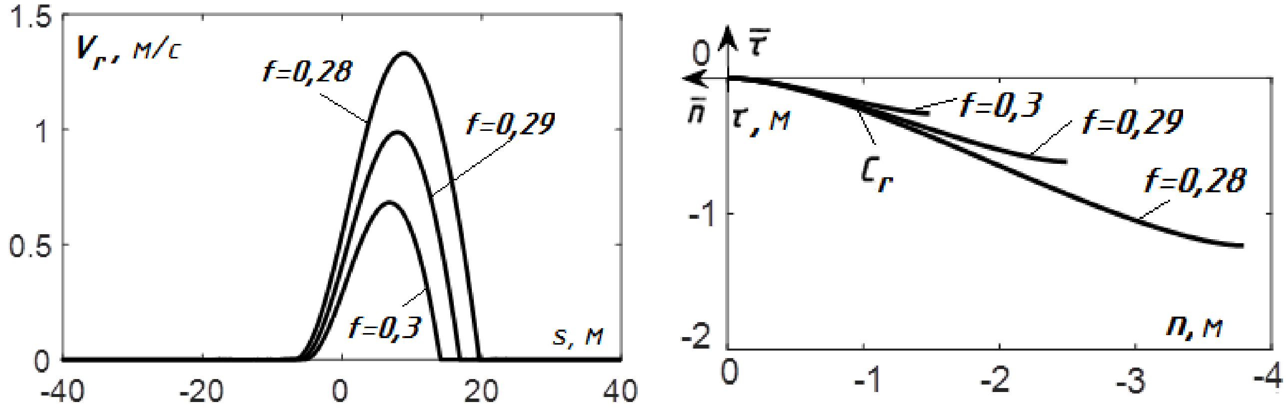


а) б)

Рис. 5.9. Графічні ілюстрації до руху автомобіля з вантажем у кузові (зафарбований у сірий колір):

а) траєкторія C_e руху автомобіля з його положенням на початку ковзання вантажу і після припинення ковзання;

б) траєкторія C_r ковзання вантажу



а) б)

Рис. 5.10. Графічні ілюстрації ковзання вантажу у кузові автомобіля для різних значень коефіцієнта тертя f:

а) графіки зміни відносної швидкості ковзання;

б) траєкторії ковзання вантажу

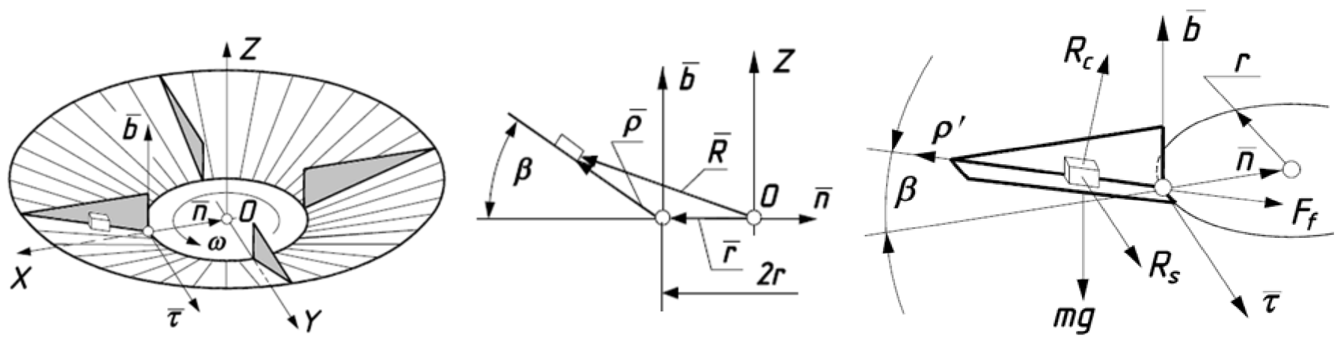
Суттєвий вплив швидкості V_e руху автомобіля на траєкторію ковзання вантажу пояснюється тим, що квадрат швидкості V_e входить до виразу відцентрової сили $F_c = mV_e^2 k$, яка спричиняє ковзання.

5.3. Рух частинки по внутрішній поверхні конуса з вертикальними лопатками

Запропонований підхід може бути застосовано до проєктування пристроїв відцентрової дії.

Нехай конструкція відцентрового апарата складається зі зрізаного конуса з плоским дном і з вертикально встановленими лопатками у радіальному напрямі (див. рис. 5.11,а). При обертанні апарата навколо осі OZ з кутовою швидкістю ω частинки матеріалу під дією відцентрової сили попадають на лопатку і далі рухаються вгору вздовж неї по прямій лінії перетину конуса і лопатки.

Для складання диференціальних рівнянь руху частинки використаємо рухому систему координат $\overline{\tau}, \overline{n}, \overline{b}$ (див. рис. 5.11,а).



а) б) в)

Рис. 5.11. Графічні ілюстрації до складання диференціальних рівнянь руху частинки в системі тригранника Френе:

а) схематичне зображення конструкції апарата з частинкою на ньому;

б) схема до складання векторного рівняння положення частинки;

в) фрагмент конуса і лопатки і прикладені до частинки сили

Її початок координат збігається з нижньою точкою лопатки. При обертанні конічного диска рухома система обертатиметься разом з ним і її початок описуватиме коло радіуса r. У такому випадку рухому систему можна розглядати як супровідний тригранник Френе, який рухається по колу. Орт $\overline{\tau}$ тригранника спрямований по дотичній до кола, орт головної нормалі $\overline{n}$ – до центра кола і орт бінормалі $\overline{b}$ – перпендикулярно до перших двох – вертикально вгору. Абсолютний рух частинки також складатиметься з двох рухів – переносного руху тригранника Френе і відносного руху частинки в системі тригранника.

Нехай частинка буде розташована на певній відстані ρ від вершини тригранника. Тоді її положення у векторному вигляді запишеться (див. рис. 5.11,б) рівнянням (5.2): $\overline{R} = \overline{r} + \overline{\rho}$.

Щоб знайти абсолютну швидкість руху частинки, векторне рівняння (5.2) потрібно продиференціювати по часу t. Приймаючи s за незалежну змінну, отримаємо вже наведене раніше рівняння (5.4): $\frac{d\overline{R}}{dt} = \frac{d\overline{R}}{ds}\frac{ds}{dt} = V_e\frac{d\overline{R}}{ds}$, де $\frac{ds}{dt} = V_e$ швидкість руху тригранника по кривій, яка визначається через кутову швидкість ω обертання апарата: $V_e=\omega r$.

Розкладемо радіус-вектор $\overline{\rho}$ в проекціях на орти тригранника (див. рис. 5.11,б). Тоді векторне рівняння (5.2) запишеться наступним чином:

$$\overline{R} = \overline{r} - \overline{n}\rho\cos\beta + \overline{b}\rho\sin\beta, \tag{5.35}$$

де $\rho=\rho(s)$ – відстань від початку координат тригранника до частинки вздовж лінії відносного руху по твірній конуса. Ця відстань є невідомою функцією, залежною від s. Диференціюємо радіус-вектор (5.35) по змінній s:

$$\frac{d\overline{R}}{ds} = \frac{d\overline{r}}{ds} - \cos\beta\left(\frac{d\overline{n}}{ds}\rho + \overline{n}\frac{d\rho}{ds}\right) + \sin\beta\left(\frac{d\overline{b}}{ds}\rho + \overline{b}\frac{d\rho}{ds}\right). \tag{5.36}$$

Похідні $\frac{d\overline{r}}{ds}, \frac{d\overline{\tau}}{ds}, \frac{d\overline{n}}{ds}, \frac{d\overline{b}}{ds}$ згідно формул Френе розписуються в проекціях на орти тригранника через кривину k і скрут σ напрямної кривої. Напрямною кривою є коло радіуса r $\left(k = \frac{1}{r}\right)$. Напрямна крива (коло) є плоскою кривою (скрут σ=*0*). Формули Френе (5.7) в цьому випадку спрощуються і мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \overline{r'} &= \overline{\tau}; \\ \overline{\tau'} &= k\overline{n}; \\ \overline{n'} &= -k\overline{\tau}, \\ \overline{b'} &= 0. \end{aligned} \tag{5.37}$$

Підставимо похідні (5.37) в (5.36) і після групування проекцій по ортах $\overline{\tau}, \overline{n}, \overline{b}$ отримаємо:

$$\overline{R'} = \overline{\tau}(1 + \rho k \cos\beta) - \overline{n}\rho'\cos\beta + \overline{b}\rho'\sin\beta. \tag{5.38}$$

Абсолютну швидкість частинки в проекціях на орти тригранника Френе отримаємо множенням виразу (5.38) на *V* згідно (5.4). Диференціюванням абсолютної швидкості (5.4) по часу *t* при умові, що *V=const*, отримаємо вираз абсолютного прискорення:

$$\frac{d^2\overline{R}}{dt^2} = V_e^2 \frac{d^2\overline{R}}{ds^2}. \tag{5.39}$$

Другу похідну $\overline{R''}$ знаходимо диференціюванням векторного виразу (5.38) по змінній *s* із застосуванням формул Френе (5.37):

$$\overline{R''} = 2\overline{\tau}\rho' k \cos\beta + \overline{n}(k + \rho k^2 \cos\beta - \rho''\cos\beta) + \overline{b}\rho''\sin\beta. \tag{5.40}$$

Множенням виразу (5.40) на V_e^2 отримаємо складові абсолютного прискорення частинки в проекціях на орти рухомого тригранника Френе.

Диференціальне рівняння абсолютного руху частинки у векторному записі має вигляд (2.3). Прикладеними силами є сила ваги mg, реакція R_c поверхні конуса, реакція R_s поверхні лопатки, сила тертя $F_c=f_cR_c$ при ковзанні частинки по поверхні конуса, сила тертя $F_s=f_sR_s$ при ковзанні частинки по поверхні лопатки (f_s і f_p– коефіцієнти тертя частинки по поверхні конуса і лопатки відповідно). Усі сили мають строго визначений напрям дії (див. рис. 5.11,в).

Сила ваги mg спрямована вниз, отже проекції напрямного одиничного вектора на орти тригранника запишуться:

$$[0; \quad 0; \quad -1]. \tag{5.41}$$

Реакція R_s лопатки спрямована перпендикулярно до неї (див. рис. 5.11,в), тобто збігається із напрямом орта $\overline{\tau}$. Проекції одиничного вектора реакції R_s запишуться:

$$[1; \quad 0; \quad 0]. \tag{5.42}$$

Реакція R_c конуса спрямована перпендикулярно до його поверхні – під прямим кутом до твірної (див. рис. 5.11,в). Проекції одиничного напрямного вектора запишуться:

$$[0; \quad \sin\beta; \quad \cos\beta]. \tag{5.43}$$

Обидві сили тертя F_c і F_s спрямовані в протилежну сторону відносного руху частинки. Оскільки вектор ρ' відносної швидкості ковзання частинки спрямований вздовж спільної прямої конуса і лопатки вгору (див. рис. 5.11,в), то сумарна сила тертя $F_f=F_c+F_s$ буде спрямована під кутом β вниз. Вважатимемо, що коефіцієнти тертя f_s і f_p рівні ($f_s=f_p=f$). Тоді сила тертя визначиться із виразу: $F_f=F_c+F_s=f(R_c+R_s)$. Проекції одиничного напрямного вектора сили тертя запишуться:

$$[0;\quad \cos\beta;\quad -\sin\beta]. \tag{5.44}$$

Розпишемо векторне рівняння (2.3) в проекціях на орти тригранника Френе:

$$\begin{aligned} &mV_e^2 2\rho' k\cos\beta = R_s;\\ &mV_e^2(k+\rho k^2\cos\beta-\rho''\cos\beta) = R_c\sin\beta + f(R_c+R_s)\cos\beta;\\ &mV_e^2\rho''\sin\beta = R_c\cos\beta - f(R_c+R_s)\sin\beta - mg. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Вираз R_s із першого рівняння (5.45) підставимо в друге і третє рівняння. Отримані два рівняння розв'яжемо відносно ρ'' і R_c:

$$\begin{aligned} &\rho'' = -\frac{g}{V_e^2}(\sin\beta+f\cos\beta)+\rho k^2\cos\beta(\cos\beta-f\sin\beta)+\\ &+k(\cos\beta-2f\rho'\cos\beta-f\sin\beta);\\ &R_c = mg\cos\beta + mkV_e^2\sin\beta(1+\rho k\cos\beta). \end{aligned} \tag{5.46}$$

Перше рівняння (5.46) є диференціальним рівнянням другого порядку і може бути розв'язане самостійно. Після знаходження залежності $\rho=\rho(s)$ стають відомими залежності реакцій $R_c=R_c(s)$ і $R_s=R_s(s)$. Диференціальне рівняння має наступний розв'язок:

$$\rho = c_1 e^{(A-f)ks\cos\beta} + c_2 e^{-(A+f)ks\cos\beta} + \frac{fg-kV_e^2+(g+fkV_e^2)\mathrm{tg}\beta}{k^2V_e^2(\cos\beta-f\sin\beta)}, \tag{5.47}$$

де $A=\sqrt{1+f^2-2f\,\mathrm{tg}\beta}$.

Знайдемо значення сталих інтегрування c_1 і c_2. Нехай при $s=0$ пройдений шлях $\rho=0$ і початкова швидкість ковзання $\rho'=0$. Відносну швидкість ковзання отримаємо диференціюванням шляху ρ по часу t: $\frac{d\rho}{dt}=\frac{d\rho}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=\rho'\cdot V_e$. Диференціюванням залежності (5.47) по змінній s знаходимо:

$$\rho' = e^{-(A+f)ks\cos\beta}\left[c_1(A-f)e^{2Aks\cos\beta} - c_2(A+f)\right]k\cos\beta. \tag{5.48}$$

Прирівнюємо рівняння (5.47) і (5.48) до нуля при $s=0$ і знаходимо сталі інтегрування c_1 і c_2:

$$c_1 = -\frac{(f+A)[fg - kV_e^2 + (g + fkV_e^2)\mathrm{tg}\beta]}{2Ak^2V_e^2(\cos\beta - f\sin\beta)}; \tag{5.49}$$

$$c_2 = \frac{(f-A)[fg - kV_e^2 + (g + fkV_e^2)\mathrm{tg}\beta]}{2Ak^2V_e^2(\cos\beta - f\sin\beta)}. \tag{5.50}$$

Із добутку $V_r=\rho'\cdot V_e^2$ можна знайти відносну швидкість ковзання частинки. Дослідження показали, що це ковзання можливе в обох напрямках у випадку, коли кут β більший за кут тертя. При недостатній швидкості V_e руху тригранника частинка може ковзати вниз. Граничне значення швидкості V_e знайдемо при $\rho'=0$, тобто при такому значенні V_e, коли частинка ковзати не буде. Прирівнявши (5.48) до нуля із урахуванням (5.49) і (5.50) і розв'язавши відносно V_e, знаходимо:

$$V_e = \sqrt{\frac{g(\sin\beta + f\cos\beta)}{k(\cos\beta - f\sin\beta)}}. \tag{5.51}$$

Наприклад, при $k=20$ $(r=0,05$ *м*$)$, $f=0,3$, $\beta=20^o$ за формулою (5.51) знаходимо: $V_e=0,6$ *м/с*. Знаходимо граничне значення кутової швидкості: $\omega=V_ek=12$ c^{-1}. При $\omega>12$ c^{-1} частинка рухається вгору, при $\omega<12$ c^{-1} – рухається вниз.

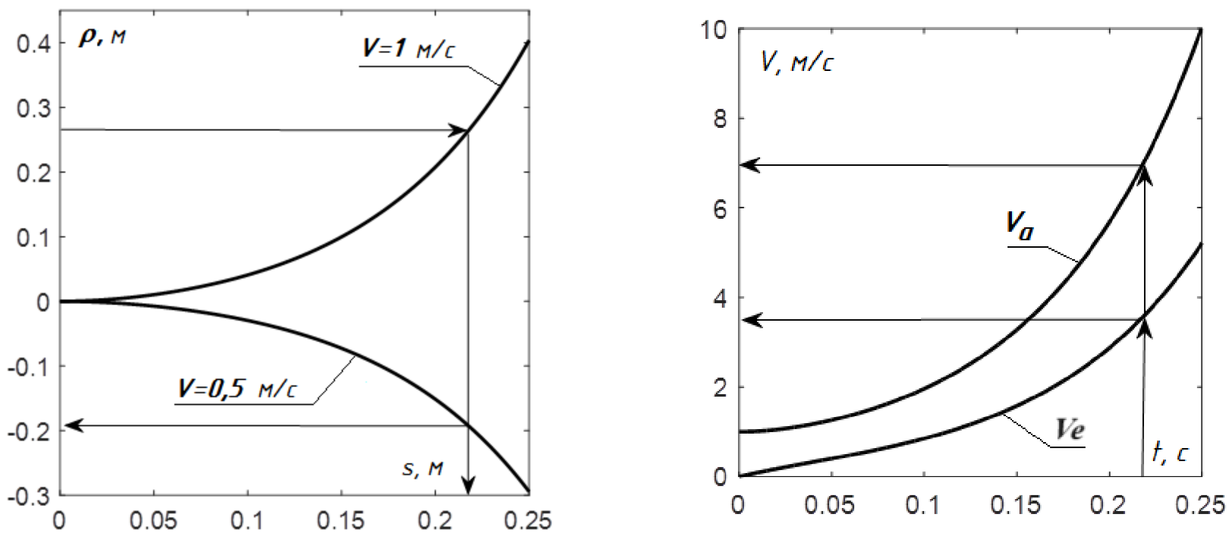
При розсіюванні частинок матеріалу важливо знати швидкість частинки в момент сходу з диска. Нехай зовнішній діаметр диска дорівнює *0,6 м*. Тоді із урахуванням $r=0,05$ *м* і $\beta=20^o$ шлях, який частинка має пройти від початку і до кінця лопатки буде рівний $\rho=0,27$ *м*. На рис. 5.12,а побудовано графік $\rho=\rho(s)$ для різних швидкостей V_e. При $V_e=1$ *м/с* частинка рухається вгору і проходить шлях $\rho=0,27$ *м* за час, коли тригранник пройде шлях $s=0,22$ *м*. Якщо рухати тригранник зі швидкістю

V_e=*0,5 м/с*, то частинка буде опускатися і за цей же час пройде шлях ρ=*0,2 м*. Шлях руху тригранника $s = V_e t$. Підстановка цього виразу у (5.47) і (5.48) дасть залежності довжини шляху і відносної швидкості від часу t. Оскільки одна крива на рис. 5.12,а побудована для V_e=*1 м/с*, то в цьому випадку s=t, тобто шлях ρ=*0,27 м* частинка проходить за час *t=0,22 с*.

Із виразу (5.38) можна знайти абсолютну швидкість V_a руху частинки, як геометричну суму проекцій на орти тригранника. Згідно (5.4) і (5.38) отримаємо:

$$V_a = \frac{d\overline{R}}{dt} = V_e \frac{d\overline{R}}{ds} = \sqrt{(1 + \rho k \cos\beta)^2 + \rho'^2}. \qquad (5.52)$$

На рис. 5.12,б побудовано графіки зміни швидкостей руху в залежності від часу t (в даному випадку s=t). З них можна визначити величину кожної швидкості в момент сходу частинки із диска. Для цього з графіка знаходимо відповідні значення при *t=0,22 с*: V_e=3,5 *м/с*, V_a=*7 м/с*.



а) б)

Рис. 5.12. Графіки зміни шляху і швидкостей руху частинки при *β=20°, k=20, f=0,3*:
а) графік зміни залежності *ρ=ρ(s)* для різних швидкостей руху тригранника;
б) графіки зміни відносної V_r і абсолютної V_a швидкостей частинки при *V=1 м/с*

5.4. Рух частинки по гвинтовому коноїду, який обертається всередині нерухомого циліндра

Застосуємо рухомий тригранник і формули Френе до аналітичного опису складного руху частинки по периферії вертикального шнека, який обертається всередині співвісного циліндричного кожуха [140, 141]. Це є частковий випадок гвинтового конвеєра із вертикальною віссю, розглянутого у підрозділі 3.3.3.

Після підстановки виразів похідних (5.37) у (5.6) і групування проекцій по ортах $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ отримаємо:

$$\overline{R'} = \bar{\tau} + \bar{n}k\rho_\tau + \bar{\tau}\rho_\tau' - \bar{\tau}k\rho_n + \bar{n}\rho_n' = \bar{\tau}(1 + \rho_\tau' - k\rho_n) + \bar{n}(\rho_n' + k\rho_\tau) + \bar{b}\rho_b'. \quad (5.53)$$

Отже проекції абсолютної швидкості на орти тригранника з урахуванням (5.4) запишуться:

– на орт $\bar{\tau}$: $V_{a\tau} = V_e(1 + \rho_\tau' - k\rho_n)$;

– на орт $\bar{n}$: $V_{an} = V_e(\rho_n' + k\rho_\tau)$;

– на орт $\bar{b}$: $V_{ab} = V_e\rho_b'$.

Після диференціювання абсолютної швидкості (5.4) по часу t при умові, що V_e=*const*, отримаємо вираз абсолютного прискорення w:

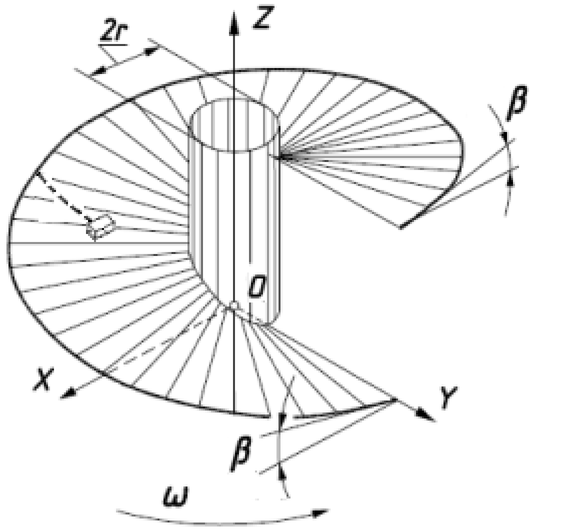
$$\bar{w} = \frac{d\overline{V}_a}{dt} = \frac{d\overline{V}_a}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\overline{V}_a}{ds}V_e = {V_e}^2\frac{d^2\overline{R}}{ds^2}. \quad (5.54)$$

Другу похідну $\overline{R''}$, яка входить до виразу (5.54), знаходимо диференціюванням векторного виразу (5.53) по змінній s із застосуванням формул Френе (5.37), маючи на увазі, що кривина $k=k(s)$ є змінною величиною. Отримані вирази групуємо по ортах тригранника і множимо на ${V_e}^2$ згідно (5.54). Вирази абсолютного прискорення точки B в проекціях на орти тригранника запишуться:

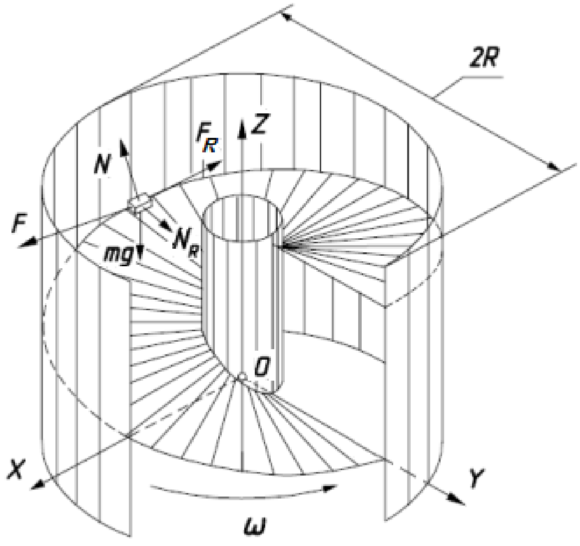
$$w_\tau = V_e^2[\rho_\tau'' - k'\rho_n - k(k\rho_\tau + 2\rho_n')];$$
$$w_n = V_e^2[\rho_n'' - k'\rho_\tau + k(1 - k\rho_n + 2\rho_\tau')]; \quad (5.56)$$
$$w_b = V_e^2\rho_b''.$$

Вирази абсолютного прискорення $\overline{w}$ необхідно мати для складання векторного рівняння руху частинки у вигляді (2.3).

Застосуємо отримані результати для аналітичного опису процесу транспортування частинки вертикальним шнеком, який обертається навколо своєї осі всередині співвісного циліндричного кожуха. При попаданні частинки на поверхню шнека вона починає ковзати по ньому, віддаляючись від осі під дією відцентрової сили (див. рис. 5.13,а, траєкторія ковзання зображена штриховою лінією).



а)



б)

Рис. 5.13. Графічні ілюстрації до переміщення частинки вертикальним шнеком: а) один виток поверхні шнека з траєкторією ковзання частинки по ньому; б) прикладені до частинки сили, зумовлені дією поверхонь шнека і циліндричного кожуха

При зустрічі з циліндричним кожухом частинка починає взаємодіяти з обома поверхнями. При цьому вона змушена ковзати по гвинтовій лінії – крайці шнека зі сталим кутом підйому β. Якщо обертання шнека з кутовою швидкістю ω відбувається проти годинникової стрілки, то частинка буде ковзати по гвинтовій лінії в протилежну сторону і при цьому буде підніматися вгору. Отже, ковзання частинки по відношенню до шнека відбувається за годинниковою стрілкою, а підйом забезпечується відповідним напрямом навивки шнека (див. рис. 5.13).

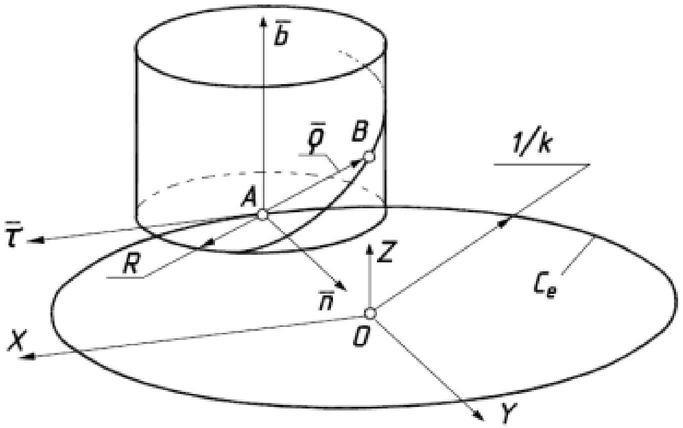
На частинку діють наступні сили: сила ваги mg, сила реакції поверхні шнека R, сила реакції поверхні циліндричного кожуха R_R, сила тертя F, спричинена ковзанням частинки по поверхні шнека і сила тертя F_R, спричинена ковзанням частинки по поверхні циліндричного кожуха (див. рис. 5.13,б).

При обертанні шнека обертається гвинтова лінія – його крайка, а по гвинтовій лінії ковзає частинка. У загальному випадку параметричні рівняння гвинтової лінії в системі тригранника запишуться:

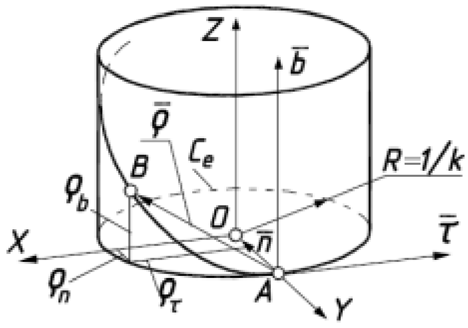
$$\begin{aligned} \rho_\tau &= r_0 \cos\alpha; \\ \rho_n &= r_0 \sin\alpha; \\ \rho_b &= r_0 \alpha \operatorname{tg}\beta, \end{aligned} \tag{5.57}$$

де r_0 – радіус циліндра, на якому розташована гвинтова лінія, м;
β – кут підйому гвинтової лінії, град;
α – кут повороту точки, яка рухається по гвинтовій лінії, навколо її осі (незалежна змінна), град.

Нехай напрямною кривою для тригранника буде інше коло зі сталою кривиною k – радіуса $\frac{1}{k}$ (див. рис. 5.14,а). При русі тригранника по напрямному колу точка B одночасно має ковзати по гвинтовій лінії. Щоб поєднати ці рухи, потрібно задати залежність $\alpha=\alpha(s)$, де s – довжина дуги напрямного кола. Від залежності $\alpha=\alpha(s)$ залежить форма абсолютної траєкторії точки B. Вона матиме просторову форму і не задовольнятиме вимогам роботи шнека, у якого абсолютна траєкторія не покидає поверхні циліндра радіуса r_0 (див. рис. 5.13,б). За вимогою роботи шнека обидва кола мають бути рівними $\left(r_0 = \frac{1}{k}\right)$, при підйомі по гвинтовій лінії частинка має повертатися за годинниковою стрілкою і вершина тригранника має рухатися по колу (див. рис. 5.14,б).



а)



б)

Рис. 5.14. Варіанти утворення абсолютної траєкторії точки B, яка в системі тригранника рухається по гвинтовій лінії:

а) напрямне коло C_e і коло основи циліндра мають різні радіуси;

б) напрямне коло C_e і коло основи циліндра збігаються

Цим вимогам задовольняють наступні параметричні рівняння гвинтової лінії в системі тригранника:

$$\rho_\tau = -r_0 \sin\alpha;$$
$$\rho_n = r_0 - r_0 \cos\alpha; \tag{5.58}$$
$$\rho_b = r_0 \alpha \,\mathrm{tg}\beta.$$

Для знаходження абсолютного прискорення за формулами (5.56) потрібно мати перші і другі похідні рівнянь (5.58). Знаходимо їх, маючи на увазі, що $\alpha=\alpha(s)$:

$$\rho_\tau' = -r_0\alpha'\cos\alpha; \quad \rho_\tau'' = r_0\alpha'^2\sin\alpha - r_0\alpha''\cos\alpha;$$
$$\rho_n' = r_0\alpha'\sin\alpha; \quad \rho_n'' = r_0\alpha'^2\cos\alpha + r_0\alpha''\sin\alpha; \tag{5.59}$$
$$\rho_b' = r_0\alpha'\mathrm{tg}\beta; \quad \rho_b'' = r_0\alpha''\mathrm{tg}\beta.$$

Підставимо похідні (5.59) у (5.56), маючи на увазі, що $k = \frac{1}{r_0}$ і $k'=0$. Після спрощень отримаємо:

$$
\begin{aligned}
w_\tau &= \frac{V_e^2}{r_0}[(r_0\alpha' - 1)^2 \sin\alpha - r_0{}^2\alpha'' \cos\alpha];\\
w_n &= \frac{V_e^2}{r_0}[(r_0\alpha' - 1)^2 \cos\alpha + r_0{}^2\alpha'' \sin\alpha];\\
w_b &= V_e^2 r_0 \alpha'' \mathrm{tg}\beta.
\end{aligned}
\tag{5.60}
$$

Для складання рівнянь руху частинки необхідно знати напрям дії всіх прикладених сил. Сила ваги mg спрямована вниз, тобто в протилежну сторону напряму бінормалі. Проекції одиничного вектора на орти тригранника запишуться:

$$[0;\quad 0;\quad -1]. \tag{5.61}$$

Напрям реакції R поверхні шнека (див. рис. 5.13,б) може бути знайдено засобами диференціальної геометрії. Знайдемо її простіше, зважаючи на те, що вона одночасно перпендикулярна двом лініям: гвинтовій лінії і прямолінійній твірній поверхні шнека – розташована у дотичній до циліндра площині. При русі частинки по гвинтовій лінії кут нахилу одиничного вектора N до горизонтальної площини є сталим. Його складова на горизонтальну площину дорівнює $\sin\beta$, а на орт $\overline{b}$ бінормалі відповідно $\cos\beta$. Горизонтальну складову $\sin\beta$ розкладемо на орти $\overline{\tau}$ і $\overline{n}$ зважаючи на те, що її поворот на кут α відбувається за годинниковою стрілкою. Таким чином, проекції одиничного вектора нормалі N на орти тригранника запишуться:

$$[\sin\beta\,\cos\alpha;\quad -\sin\beta\,\sin\alpha;\quad \cos\beta]. \tag{5.62}$$

Реакція R_R поверхні циліндра спрямована перпендикулярно його дотичній площині в сторону осі (див. рис. 5.13,б). Одиничний вектор в проекціях на орти тригранника запишеться:

$$[\sin\alpha; \quad \cos\alpha; \quad 0]. \tag{5.63}$$

Сила тертя є добутком реакції поверхні на коефіцієнт тертя. Позначимо коефіцієнт тертя частинки по поверхні шнека через f і по поверхні циліндричного кожуха через f_R. Тоді величини сил тертя, позначених на рис. 5.13,б, запишуться: $F=fR$, $F_R=f_RR_R$. Потрібно визначити напрям дії цих сил. Сила F спрямована в протилежну сторону вектора швидкості ковзання частинки по шнеку. Частинка ковзає по гвинтовій лінії (крайці шнека), отже напрям ковзання задається першими похідними рівнянь (5.58), які наведені у (5.59). Їх геометрична сума, помножена на швидкість V_e, дасть величину швидкості V_r відносного руху частинки:

$$V_r = V_e\sqrt{\rho'^2_\tau + \rho'^2_n + \rho'^2_b} = \frac{V_e r_0 \alpha'}{\cos\beta}. \tag{5.64}$$

Напрям одиничного вектора відносної швидкості V_r отримаємо діленням її складових на величину (5.64):

$$[-\cos\beta\cos\alpha; \quad \cos\beta\sin\alpha; \quad \sin\beta]. \tag{5.65}$$

Сила F_R спрямована в протилежну сторону вектора швидкості ковзання частинки по поверхні циліндричного кожуха, який не рухається. Це означає, що вона спрямована в протилежну сторону від вектора абсолютної швидкості. Величину абсолютної швидкості V_a визначаємо аналогічно:

$$V_a = V_e\sqrt{V_{a\tau}^2 + V_{an}^2 + V_{ab}^2} = \frac{V_e}{\cos\beta}\sqrt{(1-2r_0\alpha')\cos^2\beta + r_0{}^2\alpha'^2}. \tag{5.66}$$

Проекції одиничного вектора абсолютної швидкості V_a запишуться:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{(1-2r_0\alpha')\cos\beta\,\cos\alpha}{\sqrt{(1-2r_0\alpha')\cos^2\beta+r_0{}^2\alpha'^2}}; \\ \dfrac{(1-2r_0\alpha')\cos\beta\,\sin\alpha}{\sqrt{(1-2r_0\alpha')\cos^2\beta+r_0{}^2\alpha'^2}}; \\ \dfrac{r_0\alpha'\sin\beta}{\sqrt{(1-2r_0\alpha')\cos^2\beta+r_0{}^2\alpha'^2}} \end{bmatrix}. \tag{5.67}$$

Розпишемо векторне рівняння (2.3) в проекціях на орти $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$ тригранника із урахуванням напрямів (5.61), (5.62), (5.63), (5.65) і (5.67) діючих відповідних сил mg, R, R_R, $F=fR$, $F_R=f_R R_R$:

$$\begin{aligned} mw_\tau &= R\sin\beta\cos\alpha + R_R\sin\alpha + fR\cos\beta\cos\alpha \\ &\qquad - f_R R_R \frac{(1-2r_0\alpha')\cos\beta\,\cos\alpha}{\sqrt{(1-2r_0\alpha')\cos^2\beta+r_0{}^2\alpha'^2}}; \\ mw_n &= -R\sin\beta\sin\alpha + R_R\cos\alpha - fR\cos\beta\sin\alpha \\ &\qquad - f_R R_R \frac{(1-2r_0\alpha')\cos\beta\,\sin\alpha}{\sqrt{(1-2r_0\alpha')\cos^2\beta+r_0{}^2\alpha'^2}}; \\ mw_b &= -mg + R\cos\beta - fR\sin\beta - f_R R_R \frac{r_0\alpha'\sin\beta}{\sqrt{(1-2r_0\alpha')\cos^2\beta+r_0{}^2\alpha'^2}}. \end{aligned} \tag{5.68}$$

Підставимо в (5.68) вирази абсолютного прискорення із (5.60) і отримаємо систему трьох диференціальних рівнянь із трьома невідомими функціями: $\alpha=\alpha(s)$, $R=R(s)$ і $R_R=R_R(s)$. Розв'яжемо систему відносно α'', R, R_R:

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \frac{\cos\beta\,[f_R(r_0\alpha'-1)^2(1-2r_0\alpha'+\cos 2\beta - f\sin 2\beta)]}{2r_0{}^2\sqrt{(1-2r_0\alpha')\cos^2\beta+r_0{}^2\alpha'^2}} \\ &\qquad - \frac{g\cos\beta}{r_0V_e^2}(\sin\beta + f\cos\beta); \end{aligned} \tag{5.69}$$

$$R = m\cos\beta\left[g + \frac{V_e^2 f_R \sin\beta(R\alpha' - 1)^2}{r_0\sqrt{(1 - 2r_0\alpha')\cos^2\beta + r_0{}^2\alpha'^2}}\right]; \tag{5.70}$$

$$R_R = \frac{mV_e^2}{r_0}(r_0\alpha' - 1)^2. \tag{5.71}$$

Диференціальне рівняння (5.69) не залежить від (5.70) і (5.71), тому може бути розв’язане самостійно. Для цього потрібно застосовувати чисельні методи. Реакції поверхонь (5.70) і (5.71) визначаються після того, як розв’язано рівняння (5.69).

Очевидно, що при заданому куту β підйому гвинтової лінії – периферії шнека – кутової швидкості ω його обертання буде недостатньо для підйому частинки вгору. Можливий випадок, коли вона «залипає» – обертається разом зі шнеком, не ковзаючи по ньому. У такому випадку у відносному русі вона нерухома, а у абсолютному описує коло на внутрішній поверхні циліндричного кожуха. Із рівняння (5.69) знайдемо, за яких умов це відбувається. Очевидно, що в цьому випадку $\alpha'=\alpha''=0$. Тоді рівняння (5.69) набуває вигляду:

$$(fgr_0 - f_R V_e^2)\cos\beta + (gr_0 + f_R f V_e^2)\sin\beta = 0. \tag{5.72}$$

Розв’язавши (5.72) відносно переносної швидкості V_e, отримаємо:

$$V_e = \sqrt{\frac{gr_0(\sin\beta + f\cos\beta)}{f_R(\cos\beta - f\sin\beta)}}. \tag{5.73}$$

Переносна швидкість обертання шнека визначається із виразу: $V_e=r_o\cdot\omega$. Отже, для отримання граничного значення величини кутової швидкості обертання шнека ω_o потрібно вираз (5.73) розділити на r_o. Після цього отримаємо вираз, який повністю збігається із виразом (3.190).

Розглянемо приклад. Нехай кут підйому крайки шнека $\beta=15°$, радіус циліндричного кожуха $r_0=0,1$ *м*, коефіцієнти тертя $f=f_R=0,3$. Із формули (5.73) отримуємо: V_e*=1,42 м/с*. Для розглянутого випадку кривина стала і рівна $k = \frac{1}{r_0}$, тому кутова швидкість ω теж стала: $\omega = \frac{Ve}{r_0}$*=14,2 с*$^{-1}$.

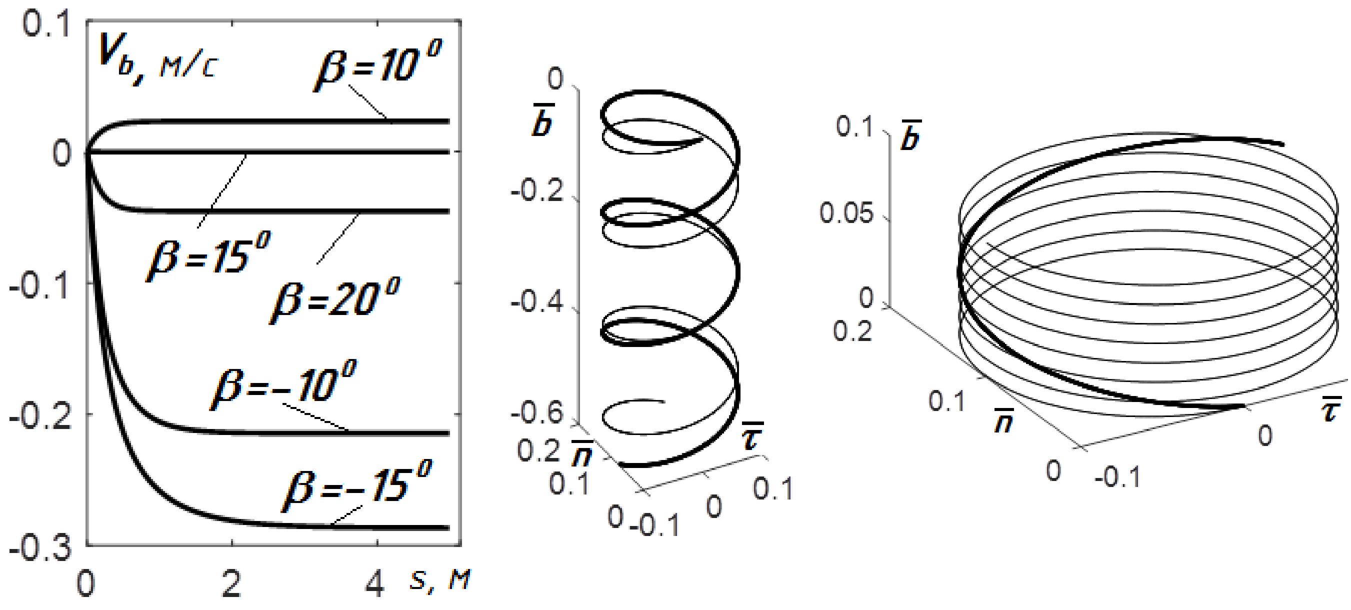
Важливим показником є швидкість V_b підйому частинки вгору. Вона є рівною складовою як абсолютної, так і відносної швидкостей у вертикальному напрямі, тобто паралельно орту $\overline{b}$. На основі цього можна записати:

$$V_b = V_e\rho_b^{'} = V_e r_0 \alpha^{'}\mathrm{tg}\beta. \tag{5.74}$$

Якщо шнек обертати з кутовою швидкістю $\omega = \frac{V_e}{r_0}$, де V_e знайдено за формулою (5.73), то кутова швидкість ковзання частинки $\alpha'=0$. Тоді відповідно до (5.74) переміщення частинки у вертикальному напрямі відсутнє. Про це свідчить графік $V_b=V_b(s)$, побудований за допомогою чисельного методу (див. рис. 5.15,а).

З нього видно, що при $\beta=15°$ швидкість у вертикальному напрямі $V_b=0$. Однак при кутові $\beta= -15°$ швидкість V_b зростає і з часом стає сталою, однак частинка рухається не вгору, а вниз. Це означає, що напрям навивки шнека змінився на протилежний і частинка ковзає в протилежну сторону до напрямку його обертання, рухаючись вниз. При збільшенні кута β до $20°$ частинка рухається вниз незалежно від його знака (на рис. 5.15,а показано графік для $\beta=20°$, для $\beta= -20°$ графік не побудовано, оскільки її швидкість руху вниз значно зростає). Таким чином, при кутах більших від граничного значення $\beta=15°$ частинка вгору рухатися не може при незмінній кутовій швидкості обертання шнека. При меншому значенні (наприклад, при $\beta=10°$) частинка рухається вгору, а при зміні знака кута β – вниз. Із графіків видно, що у всіх випадках швидкість частинки з часом стає сталою. Кутову швидкість ковзання після стабілізації руху можна знайти, прирівнявши у рівнянні (5.69) $\alpha''=0$ і розв'язавши відносно α'. Однак таке рівняння потрібно розв'язувати чисельними методами. Наприклад, для $\beta=10°$ отримуємо: $\alpha'=0,927$ *м*$^{-1}$. Підстановка цього значення у (5.74) дає: V_b*=0,023 м/с*.

На рис. 5.15,б,в побудовані відносні траєкторії руху частинки за рівняннями (5.58) при різних значеннях кута β (зображені тонкими лініями). Абсолютні траєкторії показані потовщеними лініями. Вони побудовані за рівняннями (5.58) при підстановці в них замість кута $\alpha=\alpha(s)$ різниці кутів, на які повертається шнек навколо своєї осі $\left(\frac{s}{r_0}\right)$ і частинка при ковзанні по шнеку ($\alpha=\alpha(s)$), тобто $\frac{s}{r_0}-\alpha$.



а) б) в)

Рис. 5.15. Графічні ілюстрації до руху частинки при $r_0=0{,}1$ м, $f_R=f=0{,}3$, $V_e=1{,}42$ м/с:
а) графіки швидкості переміщення частинки у вертикальному напрямі в залежності від значення кута β;
б) відносна і абсолютна траєкторії частинки при $\beta=-10°$ (рух вниз);
в) відносна і абсолютна траєкторії частинки при $\beta=10°$ (рух вгору)

Аналізуючи рівняння (5.69), можна виявити ще один характерний рух частинки, коли $\alpha''=0$, але $\alpha'\neq 0$. Це можливо, коли вирази в круглих дужках $r_0\alpha'-1=0$ і $\sin\beta+f\cos\beta=0$. Із виразу у перших дужках отримуємо: $r_0\alpha'=1$, тобто $\alpha'=\frac{1}{r_0}$ або $\alpha=\frac{s}{r_0}$. Це означає, що різниця кутових швидкостей $\frac{s}{r_0}-\alpha$ дорівнює нулю, тобто кутові швидкості обертання шнека і ковзання частинки по гвинтовій лінії (крайці шнека) однакові і протилежно спрямовані. Із рівності нулю других дужок отримуємо: $\beta=-$

arctg$f$. Це означає, що кут β має від’ємне значення і він рівний кутові тертя частинки по поверхні шнека. При від’ємному кутові частинка може рухатися тільки вниз, причому вона опускається по прямій лінії – прямолінійній твірній циліндричного кожуха. Підставивши $\alpha' = \frac{1}{r_0}$ у вираз (5.74) знаходимо швидкість опускання частинки: $V_b = V_e \mathrm{tg}\beta$.

Актуальним питанням транспортування частинки є не її опускання, а підйом. Якщо шнек заданий конструктивними параметрами r_0 і β і відомі коефіцієнти тертя f і f_R, то можна знайти граничне значення кутової швидкості обертання шнека, при якій і менше якої підйом частинки неможливий. Наприклад, для $\beta=15°$ було отримано значення $\omega=14{,}2\ c^{-1}$. Для $\beta=30°$ аналогічно отримаємо: $\omega=18{,}6\ c^{-1}$. Отже, по мірі збільшення кута β граничне значення величини кутової швидкості зростає. Постає питання: до яких меж може зростати кут β, адже при $\beta=90°$ гвинтова лінія перетворюється у вертикальну пряму і в такому випадку підйом частинки стає неможливим при будь-яких кутових швидкостях обертання шнека, оскільки він перетворюється у вертикальну площину. Щоб відповісти на це питання, розв’яжемо рівняння (5.72) відносно кута β:

$$\beta_{max} = \arccos \frac{f_R f V_e^2 + g r_0}{\sqrt{(1+f^2)(f_R^2 V_e^4 + g^2 {r_0}^2)}}. \tag{5.75}$$

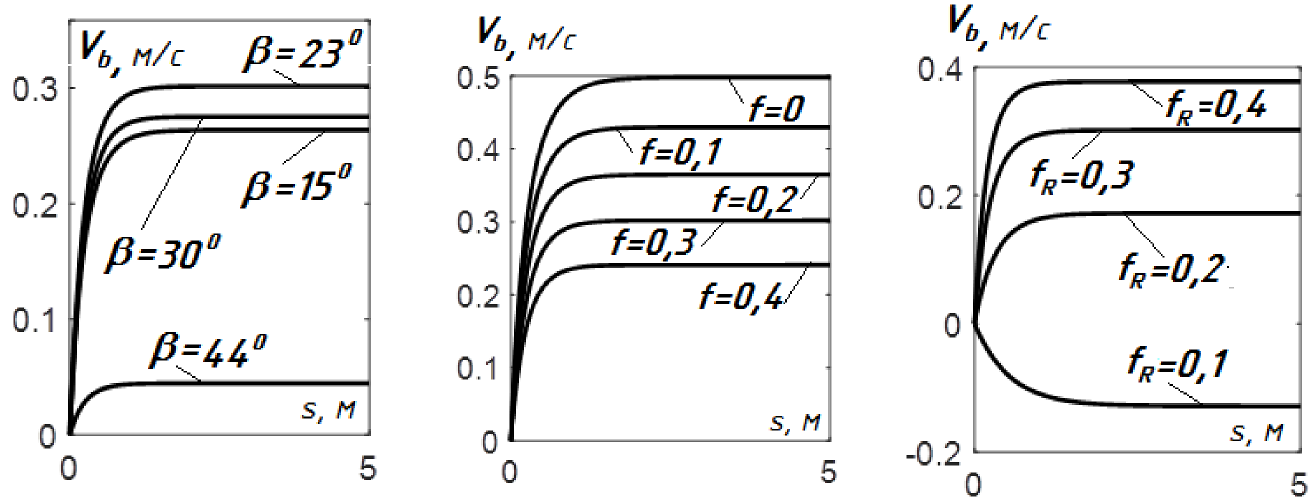
Знайдемо значення величини кута β, при якому частинка «залипає» при необмеженому зростанні кутової швидкості обертання шнека, тобто при необмеженому зростанні переносної швидкості V_e. Для цього перейдемо до границі:

$$lim_{V_e \to \infty} \arccos \frac{f_R f V_e^2 + g r_0}{\sqrt{(1+f^2)(f_R^2 V_e^4 + g^2 {r_0}^2)}} = \mathrm{arcctg} f. \tag{5.76}$$

Отже, існує максимальне значення кута β підйому гвинтової лінії, при якому підйом частинки неможливий ні при яких кутових швидкостях обертання шнека.

Величина цього кута залежить від коефіцієнта тертя частинки по поверхні шнека. Таким чином, частинку можна транспортувати вгору при різних кутах β і різних кутових швидкостях обертання шнека із числа допустимих.

З'ясуємо, як впливає на швидкість підйому частинки кут β підйому гвинтової лінії. Візьмемо шнек із конструктивними параметрами $r_0=0{,}1$ *м* і $\beta=30°$. Раніше було знайдено мінімальне значення кутової швидкості при відомих коефіцієнтах тертя f і f_R: $\omega=18{,}6\ c^{-1}$. Максимально можливе значення кута β для розглянутого випадку згідно (5.75) становить $46°$. Дослідження показали, що найбільша швидкість підйому частинки відбувається при кутові підйому β, рівному половині максимального значення, тобто в розглянутому випадку при $\beta=23°$. На рис. 5.16,а побудовано графіки залежності $V_b=V_b(s)$ при $\omega=25\ c^{-1}$ (значення кутової швидкості обертання шнека має бути більшим від мінімально можливого). З графіка видно, що при $\beta=23°$ швидкість підйому частинки є найбільшою і після стабілізації руху становить $V_b=0{,}3$ *м/с.*



а) б) в)

Рис. 5.16. Графіки залежностей $V_b=V_b(s)$ при $r_0=0{,}1$ *м*, $\omega=25\ c^{-1}$, що характеризують швидкість підйому частинки в залежності від деяких факторів:

а) вплив на швидкість V_b кута β підйому гвинтової лінії;

б) вплив на швидкість V_b коефіцієнта тертя f;

в) вплив на швидкість V_b коефіцієнта тертя f_R

Вплив значень коефіцієнтів f і f_R на швидкість підйому частинки продемонстровано на графіках 5.16,б і 5.16,в. З них видно, що по мірі зменшення коефіцієнта тертя f швидкість підйому частинки зростає, а для коефіцієнта тертя f_R навпаки – зменшується. При $f_R=0,1$ частинка не піднімається, а опускається.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 5

1. Отримано узагальнену математичну модель складного руху частинки по площині, переносне переміщення якої задане плоскою напрямною кривою сталої кривини. Отримана універсальна система диференціальних рівнянь (5.18) – (5.20) дає змогу дослідити рух частинки при різних кутах нахилу площини.

Встановлено мінімальне значення кута нахилу поверхні, величина якого залежить від коефіцієнта тертя та кутової швидкості її обертання, який забезпечує відсутність відриву частинки від поверхні. Так, для частинки масою $m=0,01$ *кг*, яка ковзає по площині, що обертається з кутовою швидкістю $\omega=20$ c^{-1} при радіусі напрямного кола $r=0,2$ *м* та коефіцієнті тертя $f=0,3$ цей кут становить 63°.

2. Виведено аналітичний опис складного руху частинки по площині, переносне переміщення якої задане плоскою напрямною кривою змінної кривини. Прикладом такої задачі може бути знаходження відносного руху вантажу в кузові автомобіля, що рухається по дорозі із криволінійною віссю змінної кривини.

Виведено формулу (5.34) для визначення значення дугової координати, при якому починається відносний рух вантажу. При швидкості руху кузова вантажного автомобіля $V_e=5$ *м/с*, коефіцієнті тертя $f=0,3$ та значенні сталої $a=15$, відносний рух вантажу почнеться при значенні дугової координати, що перевищує $-5,46$ *м*, а максимальна абсолютна швидкість руху вантажу досягається при ≈ 14 *м*.

Встановлено залежності траєкторії і швидкості ковзання вантажу від коефіцієнта тертя та швидкості руху автомобіля.

3. Встановлено умову можливості руху частинки по пристрою відцентрової дії, який складається зі зрізаного конуса з плоским дном і вертикально встановленими у радіальному напрямі лопатками.

Виведено формулу (5.51) для знаходження граничного значення кутової швидкості, при якій частинка ковзати не буде. Наприклад, при радіусі напрямного кола $r=0,05$ *м*, коефіцієнті тертя $f=0,3$ та куту нахилу твірних конуса $\beta=20^o$ граничне значення кутової швидкості становить $\omega=12$ c^{-1}. При $\omega>12$ c^{-1} частинка рухається вгору, при $\omega<12$ c^{-1} – рухається вниз.

Отримано графічні залежності для визначення величини швидкості частинки в момент її сходження з диска.

4. Знайдено вираз (5.73) для визначення граничного між підйомом і спуском частинки значення кутової швидкості обертання вертикального шнека всередині співвісного циліндричного кожуха. Цей вираз повністю збігається з виразом (3.190), отриманим у третьому розділі за допомогою параметричних рівнянь у функції часу. Для кута підйому крайки шнека $\beta=15°$, радіуса циліндричного кожуха $r_0=0,1$ *м* та коефіцієнтів тертя $f=f_R=0,3$ граничне значення кутової швидкості обертання становить $\omega=14,2\ c^{-1}$.

Виведено формулу (5.74) для визначення швидкості підйому частинки. Встановлено максимальне значення кута нахилу гвинтових ліній (5.75), при якому підйом частинки стає неможливим незалежно від кутової швидкості обертання шнека. З’ясовано, що найбільша швидкість підйому частинки досягається при куті підйому гвинтових ліній, рівному половині максимального значення. Встановлено що по мірі зменшення коефіцієнта тертя по поверхні шнека швидкість підйому частинки зростає, а по мірі зменшення коефіцієнта тертя по поверхні кожуха – навпаки зменшується.

Матеріали даного розділу опубліковано у працях [128, 131, 162, 169, 175, 291, 293].

ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

В дисертації здійснено теоретичне узагальнення і подальший розвиток геометро-кінематичних методів визначення параметрів руху частинок по поверхнях під дією прикладених сил. Основним результатом є вирішення науково-технічної проблеми розробки нових підходів до розв’язання таких задач із поєднанням методів класичної механіки і диференціальної геометрії поверхонь.

1. Проаналізовано основні підходи до складання диференціальних рівнянь руху точки по рухомих і нерухомих поверхнях. З’ясовано, що при цьому не існує єдиного підходу і задачі розв’язуються для конкретних типів поверхонь, причому часто використовується циліндрична система координат, в якій зручно описувати рух частинок по гвинтових і поверхнях обертання. При цьому рівняння складаються за умови, що рух по них стабілізувався, тобто вони не описують перехідного процесу. Сама поверхня описується спрощено, часто не наводяться її параметричні рівняння, які мають вирішальне значення для складання диференціальних рівнянь руху. Отримані результати відображаються у вигляді різноманітних графіків без якісної візуалізації самих поверхонь і траєкторій ковзання частинки по них.

Запропоновано відносити поверхню до внутрішніх координат, що дозволяє описати абсолютну траєкторію руху частинки додаванням її відносного (залежність двох криволінійних координат від третьої незалежної змінної) і переносного (переміщення поверхні відносно нерухомої системи координат) рухів. Ще один підхід – використання в ролі рухомої системи координат супровідного тригранника Френе. Тоді складові абсолютного прискорення визначаються за формулами Френе в проекціях на його орти.

2. Виведено узагальнені диференціальні рівняння руху частинки по нерухомій гвинтовій поверхні. Отримано часткові розв’язки для косого закритого гелікоїда та поверхонь з жолобами у вигляді півкола та синусоїди. Встановлено особливості руху частинки в залежності від конструктивних параметрів жолоба і кута підйому нижньої гвинтової лінії. Отримано результат для жолоба, у якого кут підйому нижньої гвинтової лінії дорівнює кутові тертя. В такому випадку початкова швидкість частинки буде

зменшуватися, асимптотично наближаючись до нуля, а сама вона буде рухатися нескінченно довго.

3. Досліджено відносний рух частинки по поверхнях, які здійснюють коливальний рух таким чином, що всі їх точки описують кола у горизонтальних площинах. Такими поверхнями є циліндрична із горизонтальним розташуванням прямолінійних твірних, поперечним перерізом якої є синусоїда, та зовнішня поверхня колового циліндра із горизонтальною і нахиленою віссю. Знайдено умови відриву частинки від поверхні. Для колового циліндра із нахиленою віссю частинки з різним коефіцієнтом тертя рухаються по різних траєкторіях, причому відстань між ними збільшується по мірі ковзання по поверхні, що може бути використано для сепарації матеріалу.

4. Виведено диференціальні рівняння руху частинки всередині похилого колового циліндра, який обертається навколо власної осі, з урахуванням залежності кута нахилу його осі від кута тертя, включаючи горизонтальне розташування. Встановлено особливості траєкторій ковзання частинки та умову її «залипання».

Виведено та розв’язано диференціальні рівняння ковзання частинки по поверхнях обертання, які обертаються навколо власної вертикальної осі: зовнішній поверхні конуса; внутрішній поверхні, меридіаном якої є віддалена від осі обертання вітка параболи; внутрішній поверхні сферичного сегмента без і за наявності вертикальних лопаток. За результатами досліджень отримано три патенти України на корисну модель для розсіювальних апаратів відцентрової дії.

5. Встановлено умови транспортування частинки вгору гвинтовим коноїдом, з’єднаним з циліндричним кожухом, які обертаються навколо спільної вертикальної осі: 1) кут підйому гвинтової лінії кріплення коноїда до кожуха повинен бути більший кута тертя; 2) кутова швидкість обертання конструкції повинна бути більшою за кутову швидкість обертання частинки при її спуску по нерухомих поверхнях.

Виведено узагальнену систему диференціальних рівнянь транспортування частинки цими ж поверхнями, але при нерухомому циліндричному кожусі, тобто гвинтовим конвеєром. З’ясована принципова відмінність процесу транспортування частинки вертикальним, горизонтальним і похилим гвинтовим конвеєром. Для похилого розташування осі встановлено кут її нахилу і кутову швидкість обертання шнека, коли відбувається якісна зміна форми абсолютної траєкторії. Встановлено умови транспортування частинки вгору або вниз.

6. Запропоновано використання тригранника Френе при простому русі частинок по нерухомій поверхні. Тригранник з частинкою у його вершині описує траєкторію на поверхні. Виведено диференціальні рівняння у функції довжини траєкторії в проекціях на орти тригранника. Прикладом запропонованого підходу є конструювання криволінійної осі силосопроводу для транспортування подрібненої маси без залипання.

7. Запропоновано використання тригранника Френе при складному русі частинки по рухомій поверхні із переходом до руху тригранника вздовж кривої змінної кривини. Такий підхід дав змогу розширити коло задач, тобто перейти від обертального руху поверхні, коли вершина тригранника описує коло, до руху, коли тригранник рухається вздовж заданої кривої змінної кривини.

Для обертального руху розв’язано задачі відносного руху частинки по похилій площині, по внутрішній поверхні конуса із вертикальними лопатками, а також транспортування частинки гвинтовим конвеєром із вертикальною віссю. В останньому випадку отримано формулу граничної величини кутової швидкості обертання шнека, коли підйом частинки стає неможливим. Вона повністю збігається із аналогічною формулою, отриманою в розділі 3 іншим шляхом. Для шнека із конструктивними параметрами $r_0=0{,}1$ *м* і $\beta=30°$ було знайдено мінімальне значення кутової швидкості при відомих коефіцієнтах тертя $f_R=f=0{,}3$: $\omega=18{,}6$ c^{-1}. Максимально можливе значення кута β для розглянутого випадку становить $46°$. Дослідження показали, що найбільша швидкість підйому частинки відбувається при кутові підйому β, рівному половині максимального значення, тобто в розглянутому випадку при $\beta=23°$.

8. Результати досліджень по вдосконаленню робочих органів, які взаємодіють із частинками технологічного матеріалу, передані в ряд зацікавлених підприємств, про що свідчать відповідні акти, а також впроваджені у навчальний процес кафедри нарисної геометрії, комп’ютерної графіки та дизайну і кафедри будівництва Національного університету біоресурсів і природокористування України та у навчальний процес кафедри проєктування технічних систем Сумського національного аграрного університету.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Abbou-ou-cherif E.-M., Piron E., Chateauneuf A., Miclet D., Lenain R., Koko J. On-the-field simulation of fertilizer spreading: Part 1 – Modeling. *Computers and electronics in agriculture*. 2017. Vol. 142 (A). P. 235–247. URL: https://doi.org/10.1016/j.compag.2017.09.006.
2. Adamchuk O. Theory of dispersal of fertilizers by a dispersing working organ of the centrifugal type. *Scientific papers at the Rousse University*. 2013. Vol. 52, no. 1. P. 22–30.
3. Adamchuk V. V. Investigation of the general case of dispersal of mineral fertilizers by a centrifugal dispersing body. *Bulletin of agrarian science*. 2003. Vol. 12. P. 51–57.
4. Agudo J. R., Luzi G., Han J., Hwang M., Lee J., Wierschem A. Detection of particle motion using image processing with particular emphasis on rolling motion. *Review of scientific instruments*. 2017. Vol. 88. 051805. URL: https://doi.org/10.1063/1.4983054.
5. Ahmed A. K., Nesvidomin A., Pylypaka S., Volina T., Dieniezhnikov S. Determining regularities in the construction of curves and surfaces using the Darboux trihedron. *Eastern-European journal of enterprise technologies*. 2023. Vol. 3, no. 1 (123). P. 6–12. URL: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.279007.
6. Ahmed T., Younes M., Wu L., Hincke M. A survey of recent patents in engineering technology for the screening, separation and processing of eggshell. *Frontiers in bioengineering and biotechnology*. 2021. 9:677559. URL: https://doi.org/10.3389/fbioe.2021.677559.
7. An X., Cheng X., Wang X., Han Y., Li H., Liu L., Liu M., Liu M., Zhang X. Design and experimental testing of a centrifugal wheat strip seeding device. *Agriculture (Switzerland)*. 2023. Vol. 13 (10). 1883. URL: https://doi.org/10.3390/agriculture13101883.
8. Andrés M.-P., Alicia L.-M. Developable helicoids from cylindrical helix and its application as architectural surface. *Thinking, drawing, modelling*. 2020. P. 107–120. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-46804-0_8.

9. Aracena K. A. V., Benito J. G., Oger L., Ippolito I., Uñac R. O., Vidales A. M. Frequency–amplitude behavior in the incipient movement of grains under vibration. *Particuology*. 2018. Vol. 40. P. 1–9. URL: https://doi.org/10.1016/j.partic.2017.11.009.

10. Aracena K. de los Á. V., Uñac R. O., Ippolito I., Vidales A. M. Movement initiation of millimeter particles on a rotating rough surface: The role of adhesion. *Particuology*. 2020. Vol. 53. P. 92–99. URL: https://doi.org/10.1016/j.partic.2020.02.004.

11. Arendarenko V. M., Antonets A. V., Savchenko N. K., Samoilenko T. V., Ivanov O. M. Calculation model of grain gravitation movement in sloping passage with discrete variable inclination angle. *Bulletin of Poltava State Agrarian Academy*. 2020. Vol. 4. P. 273–282. URL: https://doi.org/10.31210/visnyk2020.04.35.

12. Arendarenko V., Antonets A., Ivanov O., Dudnikov I., Samoylenko T. Building an analytical model of the gravitational grain movement in an open screw channel with variable inclination angles. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2021. Vol. 3, no. 7 (111). P. 100–112. URL: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.235451.

13. Arifuzzaman S. M., Dong K., Zhu H., Zeng Q. DEM study and machine learning model of particle percolation under vibration. *Advanced Powder Technology*. 2022. Vol. 33 (5). 103551. URL: https://doi.org/10.1016/j.apt.2022.103551.

14. Arntz M. M. H. D., Beeftink H. H., den Otter W. K., Briels W. J. Segregation of granular particles by mass, radius, and density in a horizontal rotating drum. *AIChE journal*. 2014. Vol. 60 (1). P. 50–59.

15. Aschenbrenner E., Funke A. Numerical validation of a screw conveyor design method. *Energy and Fuels*. 2024. Vol. 38 (14). P. 13019–13028. URL: https://doi.org/10.1021/acs.energyfuels.4c00189.

16. Baranovsky V. M., Potapenko M. V. Theoretical analysis of the technological feed of lifted root crops. *INMATEH–Agricultural engineering*. 2017. Vol. 51 (1). P. 29–38.

17. Baranovsky V., Hevko R., Dzyura V., Klendii O., Klendii M., Romanovsky R. Justification of rational parameters of a pneumoconveyor screw feeder. *INMATEH–Agricultural engineering*. 2018. Vol. 54 (1). P. 15–24.

18. Batluk V., Basov M., Klymets V. Mathematical model for motion of weighted parts in curled flow. *Econtechmod. An international quarterly journal*. 2023. Vol. 2(3). P. 17–24.

19. Bian X., Cai W., Luo Zh., Zhao Ch., Chen Yu. Image-aided analysis of ballast particle movement along a high-speed railway. *Engineering*. 2023. Vol. 27. P. 161–177. URL: https://doi.org/10.1016/j.eng.2022.08.006.

20. Binelo M. O., Lima R. F., Faoro V., Binelo M. F. B. Computational modelling of a grain spreader for use in silos. *Biosystems Engineering*. 2022. Vol. 223. P. 29–40. URL: https://doi.org/10.1016/j.biosystemseng.2022.08.015.

21. Bivainis V., Jotautienė E., Lekavičienė K., Mieldažys R., Juodišius G. Theoretical and experimental verification of organic granular fertilizer spreading. *Agriculture (Switzerland)*. 2023. Vol. 13 (6). 1135. URL: https://doi.org/10.3390/agriculture13061135.

22. Bolat B., Temiztaş B. A., Sezer E., Solak A. Investigation of numerical belt sag and conveyor capacities in inclined belt conveyors: An iterative approach. *Powder Technology*. 2023. Vol. 420. 118394. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2023.118394.

23. Bouhaouche A., Kaoua S., Daoud K. Numerical simulation of free-flowing particles mixing in V-blender. *Granular Matter*. 2019. Vol. 21 (2). 35. URL: https://doi.org/10.1007/s10035-019-0885-7.

24. Bulgakov V., Nikolaenko S., Holovach I., Adamchuk V., Kiurchev S., Ivanovs S., Olt J. Theory of grain mixture particle motion during aspiration separation. *Agronomy research*. 2020. Vol. 18 (1). P. 18–37. URL: https://doi.org/10.15159/ar.20.057.

25. Bulgakov V., Nikolaenko S., Holovach I., Boris A., Kiurchev S., Ihnatiev Ye., Olt J. Theory of motion of grain mixture particle in the process of aspiration separation. *Agronomy research*. 2020. Vol. 18, no. 2. P. 1177–1188. URL: https://doi.org/10.15159/AR.20.069.

26. Bulgakov V., Pilipaka S., Adamchuk V., Olt J. Theory of motion of a material point along a plane curve with a constant pressure and velocity. *Agronomy research*. 2014. № 12 (3). P. 937–948.

27. Carpena P., Carretero C., Coronado J. A. V. On the circular orbits of a particle sliding on the inside of a generic surface of revolution. *European journal of physics*. 2014. Vol. 35 (1). P. 1–10. URL: https://doi.org/10.1088/0143-0807/35/1/015025.

28. Chatre L., Bataille M., Debacq M., Randriamanantena T., Nos J., Herbelet F. Modelling of powder hydrodynamics in a screw reactor. *Powder Technology*. 2023. Vol. 420. 118367. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2023.118367.

29. Chekalin A. A., Reshetnikov M. K., Shpilev V. V., Borodulina S. V. Design of engineering surfaces using quartic parabolas. *IOP conference series: materials science and engineering*. 2007. 012015. URL: http://doi.org/10.1088/1755-1315/221/1/012015.

30. Chen P., Zhang J., Wang Y., Fei J., Shen Sh., Hao X., Feng W. Effect of the rotational speeds of the screw conveyor and milling roller on the behaviour of grain flows in the connected chamber of a vertical “conveying-milling” rice mill. *Biosystems Engineering*. 2022. Vol. 224. P. 161–182. URL: https://doi.org/10.1016/j.biosystemseng.2022.10.009.

31. Chen S., Zhang X., Li Q., Shen C., Shi Y. The vertical screw conveying characteristics of cohesive particle and optimization of design parameters. *Eksploatacja i Niezawodnosc*. 2023. Vol. 25 (1). URL: https://doi.org/10.17531/ein.2023.1.13.

32. Cristian A. S. Simulation of processing of a helical surface with the aid of a frontal-cylindrical milling tool. *Procedia manufacturing*. 2019. Vol. 32. P. 36–41. URL: https://doi.org/10.1016/j.promfg.2019.02.180.

33. Cunha J. O. P., Filno R. S. Broadcast distribution uniformity of fertilizer with centrifugal spreaders used in variable rate application. *Engenharia Agrícola*. 2016. Vol. 36 (5). P. 928–937. URL: https://doi.org/10.1590/1809-4430-Eng.Agric.v36n5p928-937/2016.

34. Dancey C. L., Diplas P., Papanicolaou A., Bala M. Probability of individual grain movement and threshold condition. *Journal of Hydraulic Engineering*. 2002. Vol. 128 (12). P. 1069–1075. URL: https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9429(2002)128:12(1069).

35. Djuraev A., Yuldashev K., Teshaboyev O. Theoretical studies on screw conveyor for transportation and cleaning of linter and design of constructive parameters of

transmissions. *Scientific and technical journal of namangan institute of engineering and technology*. 2023. Vol. 8. P. 29–35. URL: https://doi.org/10.5281/zenodo.7945187.

36. Dong Z., Liu X., Wang X. Aerodynamic roughness of gravel surfaces. *Geomorphology*. 2002. Vol. 43 (1–2). P. 17–31.

37. Fang L., Yang W., Luo X., Wang Z., La D., Chen W., Liu Q., Song Sh. Impact of filling port structure on the mechanical properties of enclosed screw conveyors. *Powder Technology*. 2024. Vol. 439. 119452. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2024.119452.

38. Fang X., Wu H., Gui N., Tu J. Effect of particle shapes on diffusion and mixing in a cylindrical mixer with rotating paddles. *Computational Particle Mechanics*. 2024. Vol. 11 (4). P. 1825–1836. URL: https://doi.org/10.1007/s40571-024-00713-2.

39. Fernandez J., Cleary P., McBride W. Effect of screw design on hopper drawdown of spherical particles in a horizontal screw feeder. *Chemical Engineering Science*. 2011. Vol. 66 (22). P. 5585–5601. URL: https://doi.org/10.1016/j.ces.2011.07.043.

40. Fischer M., Chakravarty S., Le Bihan O., Morgeneyer M. Parametric study of the particle motion induced by a vortex shaker. *Powder technology*. 2020. Vol. 374. P. 70–81. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2020.06.060.

41. Galins J., Laizans A., Galins A. Increasing cyclone efficiency by using a separator plate. *Rural and environmental engineering, landscape architecture*. 2018. Vol. 1. P. 207–210. URL: https://doi.org/10.22616/rrd.24.2018.032.

42. Golub G., Ikalchyk M., Pilipaka S., Teslyuk V., Khmelevskiy V., Shvets R. Theoretical substantiation of the scraper installation parameters for removing manure. *INMATEH–Agricultural engineering*. 2018. Vol. 55 (2). P. 161–170.

43. Golub G., Lukach V., Ikalchyk M., Tesliuk V., Chuba V. Experimental study into energy consumption of the manure removal processes using scraper units. *Eastern-European journal on enterprise technologies*. 2018. Vol. 4 (1). P. 20–26.

44. Gorobets V., Trokhaniak V., Antypov I., Serdiuk A. Investigation of preparation processes of liquid feed mixtures in rotary pulsating apparatus. *Lecture notes in civil engineering*. 2021. Vol 100. P. 118–126. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-57340-9_15.

45. Gorobets V., Trokhaniak V., Masiuk M., Spodyniuk, N., Blesnyuk O., Marchishina Ye. CFD modeling of aerodynamic flow in a wind turbine with vertical rotational axis and wind flow concentrator. *INMATEH–Agricultural engineering*. 2021. Vol. 64 (2). P. 159–166. URL: https://doi.org/10.35633/inmateh-64-15.

46. Han Y., Jia F., Zeng Y., Jiang L. Zhang Y., Cao B. Effects of rotation speed and outlet opening on particle flow in a vertical rice mill. *Powder Technology*. 2016. Vol. 297. P. 153–164. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2016.04.022.

47. Han Y., Jia F., Zeng Y., Jiang L., Zhang Ya., Cao B. DEM study of particle conveying in a feed screw section of vertical rice mill. *Powder Technology*. 2017. Vol. 311. P. 213–225. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2017.01.058.

48. He S. Y., Gan J. Q., Pinson D., Yu A. B., Zhou Z. Y. Particle shape-induced axial segregation of binary mixtures of spheres and ellipsoids in a rotating drum. *Chemical Engineering Science*. 2021. Vol. 235. 116491. URL: https://doi.org/10.1016/j.ces.2021.116491.

49. Hou Q., Dong K., Yu A. DEM study of the flow of cohesive particles in a screw feeder. *Powder Technology*. 2014. Vol. 256. P. 529–539. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2014.01.062.

50. Huang T., Qian H., Li Z., Zuo T., Wu B. Promoting pellet feed flow in a screw feeder with an agitator. *Industrial and Engineering Chemistry Research*. 2023. URL: https://doi.org/10.1021/acs.iecr.3c00042.

51. Islam Md. S., Kabir A., Siraj Md. T., Hossain Md. M., Rahman M. M., Ahmed S. M. F. Experimental study of granular materials mixing in a slowly rotating drum by image analysis. *AIP Conference Proceedings*. 2023. Vol. 2825 (1). 040006. URL: https://doi.org/10.1063/5.0172294.

52. Ji Sh., Wang S., Zhou Z. Influence of particle shape on mixing rate in rotating drums based on super-quadric DEM simulations. *Advanced Powder Technology*. 2020. Vol. 31 (8). P. 3540–3550. URL: https://doi.org/10.1016/j.apt.2020.06.040.

53. Jiang H., Yang S., Hu J. Discrete element method study of the mixing and heat transfer behaviour of a binary-size granular system in a rotating drum. *Canadian Journal of Chemical Engineering*. 2024. URL: https://doi.org/10.1002/cjce.25262.

54. Jiang Sh., Ye Y., Tan Y., Liu S., Liu J., Zhang H., Yang D. Discrete element simulation of particle motion in ball mills based on similarity. *Powder Technology*. 2018. Vol. 335. P. 91–102. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2018.05.012.

55. Jotautienė E., Bivainis V., Karayel D., Mieldažys R. Theoretical and experimental verification of the physical–mechanical properties of organic bone meal granular fertilizers. *Agronomy*. 2024. Vol. 14 (6). 1171. URL: https://doi.org/10.3390/agronomy14061171.

56. Jovanović A., Pezo M., Pezo L., Lević L. DEM/CFD analysis of granular flow in static mixers. *Powder Technology*. 2014. Vol. 266. P. 240–248. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2014.06.032.

57. Kalay E., Boğoçlu M., Bolat B. Mass flow rate prediction of screw conveyor using artificial neural network method. *Powder Technology*. 2022. Vol. 408. 117757. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2022.117757.

58. Karaiev O., Bondarenko L., Halko S., Miroshnyk O., Vershkov O., Karaieva T., Shshur T., Findura P., Pristavka M. Mathematical modelling of the fruit-stone culture seeds calibration process using flat sieves. *Acta technologica agriculturae*. 2021. Vol. 24 (3). P. 119–123. URL: http://doi.org/10.2478/ata-2021-0020.

59. Karim A. M. A review of physics of moving contact line dynamics models and its applications in interfacial science. *Journal of applied physics*. 2022. Vol. 132. 080701. URL: https://doi.org/10.1063/5.0102028.

60. Khamrayeva S., Kadirova D., Rakhimkhodjayev S. Study on the mechanics of textile thread in woven. *E3S Web of conferences*. 2021. 304:03035. URL: https://doi.org/10.1051/e3sconf/202130403035.

61. Kinugasa Sh., Tanoue Sh., Shimada Y., Matsusaka Sh. Detailed analysis of particle–substrate interaction based on a centrifugal method. *Advanced Powder Technology*. 2022. Vol. 33 (11). 103793. URL: https://doi.org/10.1016/j.apt.2022.103793.

62. Kobayakawa M., Kiriyama S., Yasuda M., Matsusaka Sh. Microscopic analysis of particle detachment from an obliquely oscillating plate. *Chemical Engineering Science*. 2015. Vol. 123. P. 388–394. URL: https://doi.org/10.1016/j.ces.2014.11.046.

63. Kobets A. S., Ponomarenko N. O., Kharytonov M. M. Construction of centrifugal working device for mineral fertilizers spreading. *INMATEH – Agricultural engineering*. 2017. Vol. 51, no. 1. P. 5–14.

64. Kobets A., Aliiev E., Tesliuk H., Aliieva O. Simulation of the process of interaction of the working bodies of tillage machines with the soil in Simcenter STAR-CCM+. *Machinery & Energetics*. 2023. Vol. 14 (1). P. 9–23. URL: https://doi.org/10.31548/machinery/1.2023.09.

65. Kobets A., Ponomarenko N., Kobets O., Tesliuk H., Kharytonov M., Yaropud V. Study of fertilizer spreader centrifugal type under field conditions. *INMATEH–Agricultural engineering*. 2019. Vol. 57 (1). P. 253–260.

66. Kubota Y., Ludewig M., Thiang G. Ch. Delocalized spectra of Landau operators on helical surfaces. *Communications in mathematical physics*. 2022. Vol. 395. P. 1211–1242. URL: https://doi.org/https://doi.org/10.1007/s00220-022-04452-4.

67. Kurzthaler C., Zhu L., Pahlavan A., Stone H. Particle motion nearby rough surfaces. *Physical review fluids*. 2020. Vol. 5. 082101(R). URL: https://doi.org/10.1103/PhysRevFluids.5.082101.

68. Lawrence H., Yule I., Jones J., Hedley M. Testing the viability of existing ground spread fertilizer spreaders to perform variable rate fertilization. *Precision Agriculture*. 2023. Vol. 05. P. 655–663. URL: https://doi.org/10.3920/978-90-8686-549-9_081.

69. Le Opere di Galileo Galilei. Firenze: G. Barbero Editore. 1929–1939. Том 2. Механика (Le Meccaniche), 1593.

70. Li A., Jia F., Chu Y., Han Y., Li H., Sun Z., Ji Sh., Li Zh. Simulation of the movement of rice grains in a centrifugal huller by discrete element method and the influence of blade shape. *Biosystems Engineering*. 2023. Vol. 236. P. 54–70. URL: https://doi.org/10.1016/j.biosystemseng.2023.10.013.

71. Li A., Jia F., Shen Sh., Han Ya., Chen P., Wang Yi., Zhang J., Feng W., Fei J., Hao X. Numerical simulation approach for predicting rice milling performance under different convex rib helix angle based on discrete element method. Innovative Food

Science & Emerging Technologies. 2023. Vol. 83. 103257. URL: https://doi.org/10.1016/j.ifset.2022.103257.

72. Li Ch., Chen J., Jiang Ch., Li X., Wu Zh. Experimental investigation about the incipient velocity of spherical particles on a hemispherical bed surface. *Particuology*. 2024. Vol. 88. P. 49–61. URL: https://doi.org/10.1016/j.partic.2023.08.021.

73. Li H., Kang X., Xie A., Chen Y., Huang G. Research on the evolution method of digital twin parametric model of screw conveyor. *Proceedings of SPIE – The International Society for Optical Engineering*. 2023. Vol. 12788. 1278845. URL: https://doi.org/10.1117/12.3005285.

74. Li L., Zhenyu G., Congbo L., Lingling L., Jiwei L., Huijuan W. Design parameter optimization method of screw conveyor for high efficiency and energy saving. *Computer Integrated Manufacturing Systems*. 2023. Vol. 29 (8). P. 2585–2594. URL: https://doi.org/10.13196/j.cims.2023.08.007.

75. Li M., Wu Y., Qian Y., An X., Li H. DEM simulation on mixing characteristics and macroscopic / microscopic flow behaviors of different-shaped sphero-cylinders in a rotating drum. *Industrial & Engineering Chemistry*. 2021. Vol. 60 (24). P. 8874–8887. URL: https://doi.org/10.1021/acs.iecr.1c00962.

76. Li X., Hou Q., Dong K., Zou R., Yu A. Promote cohesive solid flow in a screw feeder with new screw designs. *Powder Technology*. 2020. Vol. 361. P. 248–257. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2019.08.045.

77. Liaposchenko O., Pavlenko I., Nastenko O. The model of crossed movement and gas liquid flow interaction with captured liquid film in the inertial-filtering separation channels. *Separation and purification technology*. 2017. Vol. 173. P. 240–243.

78. Liaposhchenko O. O., Sklabinskyi V. I., Zavialov V. L., Pavlenko I. V., Nastenko O. V., Demianenko M. M. Appliance of inertial gas-dynamic separation of gas-dispersion flows in the curvilinear convergent-divergent channels for compressor equipment reliability improvement. *IOP conference series: Materials science and engineering*. 2017. Vol. 233 (1). 012025. URL: https://doi.org/10.1088/1757-899X/233/1/012025.

79. Liaposhchenko O., Pavlenko I., Monkova K., Demianenko M., Starynskyi O. Numerical simulation of aeroelastic interaction between gas-liquid flow and deformable elements in modular separation devices. *Lecture notes in mechanical engineering*. 2020. P. 765–774. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-22365-6_76.

80. Liping Z., Kuiduo L., Haowei L., Weiqiang Zh. Study on fertilizer spreading performance of a sieve bucket-type fertilizer spreader for orchards. *Journal of Engineering Science and Technology Review*. 2023. Vol. 16 (3). P. 165–172. URL: https://doi.org/10.25103/jestr.163.20.

81. Liu H. Study on the wear of spiral drum cutting coal containing rock. *Engineering reports*. 2022. 4:e12450. URL: https://doi.org/10.1002/eng2.12450.

82. Liu H., Cha Y., Olofsson U. Effect of the sliding velocity on the size and amount of airborne wear particles generated from dry sliding wheel–rail contacts. *Tribology letters*. 2016. Vol. 63. 30. URL: https://doi.org/10.1007/s11249-016-0716-5.

83. Liu N., Liang C., Liu D., Ma J. Lu D., Li B., Luo D. The axial force model optimization and dynamic characteristics of shear-friction force in screw. *Chemical Engineering Research and Design*. 2023. Vol. 189. P. 272–281. URL: https://doi.org/10.1016/j.cherd.2022.11.031.

84. Liu N., Zhou J., Gao M., Cheng P. An experimental study on flow and heat transfer characteristics of binary hydrate slurries in a horizontal tube. *International communications in heat and mass transfer*. 2019. Vol. 102. P. 34–41. URL: https://doi.org/org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2019.01.009.

85. Liu P., Yang R., Yu A. DEM study of the transverse mixing of wet particles in rotating drums. *Chemical Engineering Science*. 2013. Vol. 86. P. 99–107. URL: https://doi.org/10.1016/j.ces.2012.06.015.

86. Loveikin V. S., Romesevych Yu. O. Dynamic optimization of a mine winder acceleration mode. *Науковий Вісник національного гірничого університету*. 2017. Vol. 4. P. 55–61.

87. Loveikin V., Romasevich Yu., Loveikin O., Spodoba A., Pochka K. Mathematical model of the dynamics changes departure of the jib system manipulator with

the simultaneous movement of its link. *Strength of materials and theory of structures*. 2020. Vol. 104. P. 175–190.

88. Lu X., Dai B., Yang S. DEM study of the effect of impeller design on mixing performance in a vertical mixer. *Industrial and Engineering Chemistry Research*. 2022. Vol. 61 (23). P. 8112–8127. URL: https://doi.org/10.1021/acs.iecr.2c00455.

89. Lytvynenko A., Yukhymenko M., Pavlenko I., Pitel J., Mizakova J., Lytvynenko O., Ostroha R., Bocko J. Ensuring the reliability of pneumatic classification process for granular material in a rhomb-shaped apparatus. *Applied sciences*. 2019. Vol. 9 (8). 1604. URL: https://doi.org/10.3390/app9081604.

90. Madumarov K. H. Graphic methods of image and mathematical description of lobe closed helical surfaces. *Natural volatiles and essential oils*. 2021. Vol. 8 (4). P. 2686–2694.

91. Madumarov K. H. Graphical methods for depicting prismatic closed helical surfaces (PZVP). *International journal of social science & interdisciplinary research*. 2022. 11 (11).

92. Mahto L., De T., Chakraborty J., Kumar J., Tripathi A., Sen M., Ketterhagen W. Accelerated DEM simulation of the hopper-screw feeder and tablet-press feeder using the multi-level coarse-graining technique. *Powder Technology*. 2024. Vol. 436. 119466. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2024.119466.

93. Marks B., Rognon P., Einav I. Grainsize dynamics of polydisperse granular segregation down inclined planes. *Journal of Fluid Mechanics*. 2012. Vol. 690. P. 499–511.

94. MatLab [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://www.mathworks.com/products/matlab.html (дата звернення: 06.10.2024).

95. McGuire A. D., Mosbach S., Reynolds G. K., Patterson R. I. A., Bringley E., Eaves N., Dreyer J. A. H, Kraft M. Analyzing the effect of screw configuration using a stochastic twin-screw granulation model. *Chemical Engineering Science*. 2019. Vol. 203. P. 358–379. URL: https://doi.org/10.1016/j.ces.2019.03.078.

96. Mei X., Xue Y., Zhang L. Determination of the optimal working performance matching through theoretical analysis and experimental study for a screw conveyor. *PLoS ONE*. 2022. e0266948. URL: https://doi.org/10.1371/journal.pone.0266948.

97. Meng X., Jia F., Qiu H., Han Ya., Zeng Yo., Xiao Ya., Chen P. DEM study of white rice separation in an indented cylinder separator. *Powder Technology*. 2019. Vol. 348. P. 1–12. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2019.03.013.

98. Merticaru V., Nagîț Gh., Dodun O., Merticaru E., Rîpanu M. I., Mihalache A. M., Slătineanu L. Influence of machining conditions on micro-geometric accuracy elements of complex helical surfaces generated by thread whirling. *Micromachines*. 2022. Vol. 13 (9). 1520. URL: https://doi.org/10.3390/mi13091520.

99. Merzliakov I., Pavlenko I., Chekh O., Sharapov S., Ivanov V. Mathematical modeling of operating process and technological features for designing the vortex type liquid-vapor jet apparatus. *Lecture notes in mechanical engineering*. 2020. P. 613–622. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-22365-6_61.

100. Mesnier A., Peczalski R., Mollon G., Vessot-Crastes S. Mixing of bi-dispersed milli-beads in a rotary drum. Mechanical segregation analyzed by lab-scale experiments and DEM simulation. *Processes*. 2020. Vol. 8 (9). 1166. URL: https://doi.org/10.3390/PR8091166.

101. Moloshnyi O. M., Szulc P., Sotnyk M. I. Influence of an inlet rotating axial device on the cavitation processes in a low specific speed centrifugal pump. *Journal of engineering sciences*. 2019. Vol. 6 (1). P. E25–E32. URL: https://doi.org/10.21272/jes.2019.6(1).e5.

102. Mushtaq M. Extraction of fruit juice: an overview. *Fruit juices*. 2017. Vol. 1 (8). P. 131–159. URL: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-802230-6.00008-4.

103. Naranjo Gómez L. N., Matsunami K., Liedekerke P. V., De Beer Th., Kumar A. Investigating screw-agitator speed ratio impact on feeding performance in pharmaceutical manufacturing using discrete element method. *Scientific Reports*. 2024. Vol. 14 (1). 21234. URL: https://doi.org/10.1038/s41598-024-72288-0.

104. Nieuwenhuizen A. T., Hofstee J. W., Lokhorst C., Müller J. Evaluation of fertilizer spreading strategies. *Precision Agriculture*. 2024. P. 439–444. URL: https://doi.org/978-908686514-7,978-907699821-3.

105. Nukeshev S., Eskhozhin D., Mamyrbayeva I., Karaivanov D., Gubasheva A., Tleumbetov K., Kossatbekova D., Tanbayev Kh. Mathematical modelling and designing of a universal conical spreader for granular material. *Acta Technologica Agriculturae*. 2023. Vol. 26 (3). P. 152–158. URL: https://doi.org/10.2478/ata-2023-0020.

106. Orefice L., Khinast J. DEM study of granular transport in partially filled horizontal screw conveyors. *Powder Technology*. 2017. Vol. 305. P. 347–356.

107. Pankiv M., Pylypets M., Pankiv V., Pankiv Yu., Dubchak N. Methodology for refining the performance of screw conveyor. *Scientific journal of the Ternopil National Technical University*. 2022. Vol. 105, no. 1. P. 95–107. URL: https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2022.01.

108. Pantaleev S., Yordanova S., Janda A., Marigo M., Ooi J. Y. An experimentally validated DEM study of powder mixing in a paddle blade mixer. *Powder Technology*. 2017. Vol. 311. P. 287–302. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2016.12.053.

109. Pavlenko I., Liaposhchenko A., Ochowiak M., Demyanenko M. Solving the stationary hydroaeroelasticity problem for dynamic deflection elements of separation devices. *Vibrations in physical systems*. 2018. Vol. 2018026.

110. Pereira G., Cleary P. W. Radial segregation of multi-component granular media in a rotating tumbler. *Granular Matter*. 2013. Vol. 15 (6). P. 705–724.

111. Pereira G., Cleary P. W. Segregation due to particle shape of a granular mixture in a slowly rotating tumbler. *Granular Matter*. 2017. Vol. 19. 23. URL: https://doi.org/10.1007/s10035-017-0708-7.

112. Pereira G., Tran N., Cleary P. Segregation of combined size and density varying binary granular mixtures in a slowly rotating tumbler. *Granular Matter*. 2014. Vol. 16 (5). P. 711–732.

113. Pérez-Arribas F., Pérez-Fernández R. A B-spline design model for propeller blades. *Advances in engineering software*. 2018. Vol. 118. P. 35–44. URL: http://doi.org/10.1016/j.advengsoft.2018.01.005.

114. Pérez-Arribas F., Trejo-Vargas I. Computer-aided design of horizontal axis turbine blades. *Renewable energy*. 2012. Vol. 44. P. 252–260. URL: http://doi.org/10.1016/j.renene.2012.01.100.

115. Petinrin M., Towoju O., Ajiboye S., Zebulun O. Numerical study of the effect of changing tube pitches on heat and flow characteristics from tube bundles in cross flow. *Journal of engineering sciences*. 2019. Vol. 6 (2). P. E1–E10. URL: https://doi.org/10.21272/jes.2019.6(2).e1.

116. Pezo L., Jovanović A., Pezo M., Čolović R., Lončar B. Modified screw conveyor-mixers – Discrete element modeling approach. *Advanced Powder Technology*. 2015. Vol. 26 (5). P. 1391–1399. URL: https://doi.org/10.1016/j.apt.2015.07.016.

117. Pylypaka S. F., Klendii M. B., Klendii O. M. Particle motion on the surface of a concave soil-tilling disk. *Acta polytechnica*. 2018. Vol. 58 (3). P. 201–208. URL: https://doi.org/10.14311/AP.2018.58.0201.

118. Pylypaka S. F., Klendii M. B., Klendii O. M. Particle motion over the surface of a rotary vertical axis helicoid. *INMATEH – Agricultural engineering*. 2017. Vol. 51, no. 1. P. 15–28.

119. Pylypaka S. F., Nesvidomin V. M., Klendii M. B., Rogovskii I. L., Kresan T. A., Trokhaniak V. I. Conveyance of a particle by a vertical screw, which is limited by a coaxial fixed cylinder. *Bulletin of the Karaganda University – Mathematics*. 2019. Vol. 95, no. 3. P. 108–118. URL: https://doi.org/10.31489/2019M2/108-119.

120. Pylypaka S., Klendii M., Kremets T., Klendii O. Particle motion over the surface of a cylinder, which performs translational oscillations in a vertical plane. *Engineering journal*. 2018. Vol. 22 (3). P. 83–92. URL: https://doi.org/10.4186/ej.2018.22.3.83.

121. Pylypaka S., Klendii M., Kresan T. Study of the movement of soil particles on the surface of a screw tillage working body. *Machinery & Energetics*. 2022. Vol. 13 (2). P. 62–72. URL: https://doi.org/10.31548/machenergy.13(2).2022.62-72.

122. Pylypaka S., Klendii M., Nesvidomin V., Trokhaniak V. Particle motion over the edge of an inclined plane that performs axial movement in a vertical limiting cylinder. *Acta polytechnica*. 2019. Vol. 59 (1). P. 67–76. URL: https://doi.org/10.14311/AP.2019.59.0067.

123. Pylypaka S., Klendiy M., Zaharova T. Movement of the particle on the external surface of the cylinder, which makes the translational oscillations in horizontal planes. *Lecture notes in mechanical engineering*. 2019. P. 336–345. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-93587-4_35.

124. Pylypaka S., Kresan T., Trokhaniak O., Taras I., Demchuk I. Parametric equations of a spatial curve as a function of length of the arc with given dependences of curvature and angle of ascent. *Journal for geometry and graphics*. 2021. Vol. 25, no. 2. P. 163–170.

125. Pylypaka S., Nesvidomin V., Volina T., Sirykh L., Ivashyna L. Movement of the particle on the internal surface of the spherical segment rotating about a vertical axis. *INMATEH – Agricultural engineering*. 2020. Vol. 62, no. 3. P. 79–86. URL: https://doi.org/10.35633/inmateh-62-08.

126. Pylypaka S., Nesvidomin V., Zaharova T., Pavlenko O., Klendiy M. The investigation of particle movement on a helical surface. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2020. P. 671–681. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-22365-6_67.

127. Pylypaka S., Volina T., Babka V. The motion of a particle on a wavy surface during its translational circular oscillations in horizontal planes. *Proceedings of Odessa Polytechnic University*. 2021. Vol. 1, no. 63. P. 44–52. URL: https://doi.org/10.15276/opu.1.63.2021.05.

128. Pylypaka S., Volina T., Hryshchenko I., Dieniezhnikov S., Rybenko I. Mathematical model of lifting particles of technological material by vertical auger. *Lecture notes in mechanical engineering*. 2022. P. 112–122. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-06044-1_11.

129. Pylypaka S., Volina T., Hryshchenko I., Rybenko I., Sydorenko N. Dynamics of a particle on a movable wavy surface. *Lecture notes in mechanical engineering*. 2021. P. 196–206. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-68014-5_20.

130. Pylypaka S., Volina T., Mukvich M., Efremova G., Kozlova O. Gravitational relief with spiral gutters, formed by the screw movement of the sinusoid. *Lecture notes in mechanical engineering*. 2020. P. 63–73. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-50491-5_7.

131. Pylypaka S., Volina T., Nesvidomin A., Zakharova I., Rebrii A. Particle movement in a centrifugal device with vertical blades. *Lecture notes in mechanical engineering*. 2021. P. 156–165. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-77823-1_16.

132. Pylypaka S., Volina, T., Zalevska O., Semirnenko S., Hryshchenko I. Movement of a particle on the inner surface with a preset meridian. *Lecture notes in mechanical engineering*. 2021. P. 535–545. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-91327-4_52.

133. Pylypaka S., Zaharova T., Zalevska O., Kozlov D., Podliniaieva O. Determination of the effort for flexible strip pushing on the surface of a horizontal cylinder. *Lecture notes in mechanical engineering*. 2020. P. 582–590. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-40724-7_59.

134. Quinn A. D., Hayward M., Baker C. J., Schmid F. A full-scale experimental and modelling study of ballast flight under high-speed trains. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*. 2010. Vol. 224 (2). P. 61–74. URL: http://dx.doi.org/10.1243/09544097JRRT294.

135. Reguła T., Frączek J., Fitas J. A model of transport of particulate biomass in a stream of fluid. *Processes*. 2021. Vol. 9 (1). 5. URL: https://doi.org/10.3390/pr9010005.

136. Ren H., Meng W. Discrete numerical simulation of performance analysis of horizontal trough-free screw conveyor in dynamic equilibrium state. *Powder Technology*. 2022. Vol. 407. 117677. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2022.117677.

137. Ren H., Meng W., Sun X., Zhao Zh., Zhao X. Discrete element analysis on dynamic characteristics of directional material flow driven by horizontal trough–free screw conveyor. *Powder Technology*. 2023. Vol. 418. 118276. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2023.118276.

138. Ren J.-L., Zhou J.-N., Han L., Hu Y.-J. Analysis of the law governing the movement of bulk materials in a vertical helical conveyer. *Journal of Engineering for*

Thermal Energy and Power. 2018. Vol. 33 (6). P. 77–82. URL: https://doi.org/10.16146/j.cnki.rndlgc.2018.06.013.

139. Robbin J. W., Salomon D. A. Introduction to differential geometry. *Springer Spektrum*. 2022. 429 p.

140. Rogatynskyi R., Hevko I., Diachun A., Rogatynska O., Melnychuk A. The cargo movement model be the screw conveyor surfaces with the rotating casing. *Scientific journal of the Ternopil National Technical University*. 2018. № 4 (92). P. 34–41. URL: https://doi.org/10.33108/visnyk_tntu2018.04.

141. Rohatynskyi R., Gevko I., Diachun A., Lyashuk O., Skyba O., Melnychuk A. Feasibility study of improving the transport performance by means of screw conveyors with rotary casings. *Acta Technologica Agriculturae*. 2019. Vol. 4. P. 140–145. URL: https://doi.org/10.2478/ata-2019-0025.

142. Sakai M., Koshizuka S. Large-scale discrete element modeling in pneumatic conveying. *Chemical Engineering Science*. 2009. Vol. 64 (3). P. 533–539. URL: https://doi.org/10.1016/j.ces.2008.10.003.

143. Salazar-Banda G. R., Felicetti M. A., Gonçalves J. A. S., Coury J. R., Aguiar M. L. Determination of the adhesion force between particles and a flat surface, using the centrifuge technique. *Powder Technology*. 2007. Vol. 173 (2). P. 107–117. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2006.12.011.

144. Samoilenko T., Arendarenko V., Antonets A. Kinematics of grain movement on a spiral device with variable angle of descent. *Bulletin of Poltava State Agrarian Academy*. 2002. Vol. 1. P. 267–274. URL: https://doi.org/10.31210/visnyk2020.01.31.

145. Santos D. A., Barrozo M. A. S., Duarte C. R., Weigler F., Mellmann J. Investigation of particle dynamics in a rotary drum by means of experiments and numerical simulations using DEM. *Advanced Powder Technology*. 2016. Vol. 27 (2). P. 692–703. URL: https://doi.org/10.1016/j.apt.2016.02.027.

146. Shimada Y., Tsubota M., Matsusaka Sh. Measurement of particle adhesion force and effective contact radius via centrifuge equipped with horizontal and vertical substrates. *Powder Technology*. 2022. Vol. 397. 117103. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2021.117103.

147. Shrestha K., Parajuli P., Baral B., Shrestha B. Mathematical modeling, simulation and analysis of rice grain movement for design and fabrication of low-cost winnowing machine. *Journal of mechanical engineering research*. 2017. Vol. 9 (1). P. 1–14. URL: https://doi.org/10.5897/JMER2016.0403.

148. Si-Qiang W., Shun-Ying J. Mixing characteristics of ellipsoidal granular materials in horizontal rotating drum based on analysis by discrete element method. *Acta Physica Sinica*. 2019. Vol. 68 (23). 234501. URL: https://doi.org/10.7498/aps.68.20191071.

149. Sklabinskyi V., Liaposhchenko O., Pavlenko I., Lytvynenko O., Demianenko M. Modelling of liquid's distribution and migration in the fibrous filter layer in the process of inertial filtering separation. *Lecture notes in mechanical engineering*. 2019. P. 489–497. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-319-93587-4_51.

150. Sun H., Ma H., Zhao Y. DEM investigation on conveying of non-spherical particles in a screw conveyor. *Particuology*. 2022. Vol. 65. P. 17–31. URL: https://doi.org/10.1016/j.partic.2021.06.009.

151. Sun L., Zhang X., Zeng Q., Gao K., Jiang K., Zhou J. Application of a screw conveyor with axial tilt blades on a shearer drum and investigation of conveying performance based on DEM. *Particuology*. 2022. Vol. 61. P. 91–102. URL: https://doi.org/10.1016/j.partic.2021.06.001.

152. Tabor S., Lezhenkin O., Halko S., Miroshnyk O., Kovalyshyn S., Vershkov O., Hryhorenko O. Mathematical simulation of separating work tool technological process. *Progress of mechanical engineering supported by information technology*: 22nd International scientific conference. POLSITA, Czajowice, 2019. 132. URL: http://doi.org/10.1051/e3sconf/201913201025.

153. Tahmasebi P. A state-of-the-art review of experimental and computational studies of granular materials: Properties, advances, challenges, and future directions. *Progress in Materials Science*. 2023. Vol. 138. 101157. URL: https://doi.org/10.1016/j.pmatsci.2023.101157.

154. Taki K., Sugiyama T., Ohara M., Umemoto S., Tanifuji Sh., Murata J., Tsujimura I., Kihara Sh. Online monitoring of the degree of fill in a rotating full-flight

screw of a corotating twin-screw extruder. *AIChE Journal*. 2019. Vol. 65 (1). P. 326–333. URL: https://doi.org/10.1002/aic.16382.

155. Tan Yu., Rackl M., Yang W., Fottner J., Meng W., Kessler S. A comparative study on design standards of screw conveyors in China, Germany, and the USA – Part II: Discrete element method. *Particuology*. 2024. Vol. 92. P. 113–125. URL: https://doi.org/10.1016/j.partic.2024.04.014.

156. Tauroa F., Piscopiab R., Grimaldi S. PTV-Stream: A simplified particle tracking velocimetry framework for stream surface flow monitoring. *CATENA*. 2019. Vol. 172. P. 378–386. URL: https://doi.org/10.1016/j.catena.2018.09.009.

157. Trushad S., Kuruneru W., Kim J.-S. Erosive wear and particle attrition in multi-stage solar particle receivers and screw conveyors: A CFD-DEM approach with machine learning and artificial neural networks. *Chemical Engineering Science*. 2024. Vol. 300. 120585. URL: https://doi.org/10.1016/j.ces.2024.120585.

158. Tsunazawa Y., Soma N., Sakai M. DEM study on identification of mixing mechanisms in a pot blender. *Advanced Powder Technology*. 2022. Vol. 33 (1). 103337. URL: https://doi.org/10.1016/j.apt.2021.10.029.

159. Ucgul M., Chang Ch.-L. Design and application of agricultural equipment in tillage systems. *Agriculture*. 2023. Vol. 13 (4). 790. URL: https://doi.org/10.3390/agriculture13040790.

160. Volina T. M., Pylypaka S. F. Force required to move the flexible strip up surface of horizontal cylinder. *Machinery & Energetics*. 2021. Vol. 12, no. 1. P. 25–29. URL: https://doi.org/10.31548/machenergy2021.01.025.

161. Volina T. M., Pylypaka S. F. Investigation of particle movement on rotary spherical segment. *Machinery & Energetics.* 2021. Vol. 12, no. 2. P. 33–38. URL: https://doi.org/10.31548/machenergy2021.02.033.

162. Volina T. M., Pylypaka S. F., Babka V. M. Motion of a particle on an inclined plane rotating around a vertical axis. *International applied mechanics*. 2022. Vol. 58. P. 488–496. URL: https://doi.org/10.1007/s10778-022-01174-x.

163. Volina T. M., Pylypaka S. F., Babka V. M. Movement of particle on inner surface with preset meridian, which rotates around vertical axis. *Machinery & Energetics*. 2021. Vol. 12, no. 4. P. 15–20. URL: https://doi.org/10.31548/machenergy2021.04.015.

164. Volina T. M., Pylypaka S. F., Babka V. M., Nesvidomin A. V. Construction of meridian for given movement of particle on surface which rotates around the vertical axis. *Machinery and Energetics*. 2021. Vol. 12, no 3. P. 33–38. URL: http://dx.doi.org/10.31548/machenergy2021.03.033.

165. Volina T., Nesvidomin V., Babka V., Hryshchenko I. Y., Kremets Ya. S. Curve axis of a silo pipeline for transportation of a crushed material. *Bulletin of Sumy National Agrarian University*. The Series: Mechanization and Automation of Production Processes. 2023. Vol. 53, no 3. P. 20–25. URL: https://doi.org/10.32782/msnau.2023.3.4.

166. Volina T., Nesvidomin V., Nesvidomin A., Babka V., Hryshchenko I. Movement of a particle along an inclined cylinder rotating around its axis. *Machinery & Energetics*. 2022. Vol. 13, no. 2. P. 32–40. URL: https://doi.org/10.31548/machenergy.13(2).2022.32-40.

167. Volina T., Pylypaka S. Dependence of resistance of movement of the flexible strip on the surface from the curvature of its axis. *Modern problems of modeling*. 2021. Vol. 21. P. 66–73. URL: https://doi.org/10.33842/22195203/2021/21/66/73.

168. Volina T., Pylypaka S. The results of the investigation of the particle movement on the cylinder outer surface during its progressive oscillations in horizontal planes. *Modern problems of modeling*. Vol. 20. 2021. P. 76–81. URL: https://doi.org/10.33842/2313-125X/2021/20/76/81.

169. Volina T., Pylypaka S. Дослідження руху частинки у відцентровому апараті з вертикальними лопатками за допомогою рухомої системи координат. *Modern problems of modeling*. 2022. Vol. 23. P. 55–64.

170. Volina T., Pylypaka S., Babka V., Zalevska O., Rebrii A. Sliding of a particle on the horizontal plane under oscillating and rotary movements. *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. 2023. P. 506–514. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-16651-8_48.

171. Volina T., Pylypaka S., Kalenyk M., Dieniezhnikov S., Nesvidomin V., Hryshchenko I., Lytvynenko Ya., Borodai A., Borodai D., Borodai Ya. Construction of mathematical model of particle movement by an inclined screw rotating in a fixed casing. *Eastern-European journal of enterprise technologies*. 2023. Vol. 5, no. 7 (125). P. 60–69. URL: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2023.288548.

172. Volina T., Pylypaka S., Kozlova O., Rebrii A., Rybenko I. Design of the curvilinear axis of the silage pipeline. *Lecture notes in mechanical engineering*. 2023. P. 115–124. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-32774-2_12.

173. Volina T., Pylypaka S., Kremets Ya., Kozlova O., Rebrii A. Organization of transportation of a particle by an inclined cylinder rotating around the axis. *Lecture notes in mechanical engineering*. 2022. P. 55–65. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-031-06044-1_6.

174. Volina T., Pylypaka S., Nesvidomin V., Kalenyk M., Spirintsev D., Dieniezhnikov S., Hryshchenko I., Rebrii A., Herashchenko T., Soloshchenko V. Determining the shape of a flexible thread in the field of horizontal and vertical forces. *Eastern-European journal of enterprise technologies*. 2024. Vol. 2 (7 (128). P. 24–30. URL: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2024.301711.

175. Volina T., Pylypaka S., Nesvidomin V., Pavlov A., Dranovska S. The possibility to apply the Frenet trihedron and formulas for the complex movement of a point on a plane with the predefined plane displacement. *Eastern-European journal of enterprise technologies*. 2021. Vol. 3, no. 7 (111). P. 45–50. URL: https://doi.org/10.15587/1729-4061.2021.232446.

176. Volina T., Pylypaka S., Nesvidomin V., Rybenko I., Sierykh L. Particle movement on the external surface of the cone that rotates around the vertical axis. *Lecture notes in mechanical engineering*. 2021. P. 557–567. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-91327-4_54.

177. Volina T., Pylypaka S., Pavlenko O., Klochko O., Hryshchenko I. The transportation of a particle by a vertical auger with a coaxial cylinder which rotate together around the common axis. *IOP conference series: Materials science and engineering*. 2021. 1164 012086. URL: https://doi.org/10.1088/1757-899X/1164/1/012086.

178. Volina T., Pylypaka S., Rebrii A., Pavlenko O., Kremets Ya. Particle movement on concave coulter of the centrifugal distributor with radially installed vertical blades. *Lecture notes in mechanical engineering*. 2021. P. 237–246. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-030-68014-5_24.

179. Wang S., Li H., Tian R., Wang R., Wang X., Sun Q., Fan J. Numerical simulation of particle flow behavior in a screw conveyor using the discrete element method. *Particuology*. 2019. Vol. 43. P. 137–148.

180. Wenda Y., Defang Z., Dong L., Qingyuan W., Peng P. Development of models relating screw conveying capacity of concrete to operating parameters and their use in conveyor operating strategies to consider batch production. *Applied Sciences*. 2024. Vol. 14 (14). 6351. URL: https://doi.org/10.3390/app14146351.

181. Widhate P., Zhu H., Zeng Q., Dong K. Mixing of particles in a rotating drum with inclined axis of rotation. *Processes*. 2020. Vol. 8 (12). 1688. P. 1–16. URL: https://doi.org/10.3390/pr8121688.

182. Xiao X., Li B., Chen M., Peng J., Peng R. Research on the effect of the cone-in-cone insert on the discharge behavior of conical silo. *Powder Technology*. 2023. Vol. 419. 118336. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2023.118336.

183. Xiao X., Tan Y., Zhang H., Deng R., Jiang Sh. Experimental and DEM studies on the particle mixing performance in rotating drums: Effect of area ratio. *Powder Technology*. 2017. Vol. 314. P. 182–194. URL: https://doi.org/10.1016/j.powtec.2017.01.044.

184. Xiao X., Zhan J., Jiang S., Peng R., Cao G., Chen R., Luo Y., Su L. The analysis of mixing performance of sand and gravel in a rotating drum by DEM. *Computational Particle Mechanics*. 2024. Vol. 11 (3). P. 1357–1373. URL: https://doi.org/10.1007/s40571-023-00693-9.

185. Xiaoxia S., Yang Z., Wenjun M., Yiying Z. Research on average vertical velocity of rubber particles in vertical screw conveyor based on bp neural network. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2021. Vol. 35 (11). P. 5107–5116. URL: https://doi.org/10.1007/s12206-021-1027-9.

186. Yang S., Shim D., Ji H., Baek J. Process design of conical roll-shaping for fabrication of variable curvature spiral blade. *Journal of the Korean society for precision engineering*. 2023. Vol. 33 (11). P. 911–918. URL: https://doi.org/10.7736/KSPE.2016.33.11.911.

187. Yang Z., Xiaoxia S., Wenjun M. Research on the axial velocity of the raw coal particles in vertical screw conveyor by using the discrete element method. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2021. Vol. 35 (6). P. 2551–2560. URL: https://doi.org/110.1007/s12206-021-0526-z.

188. Yashonkov A., Falko A. Analytical investigations of vibratory transportation of pool materials on a horizontally stepped surface. *Transportation Research Procedia*. 2022. Vol. 63. P. 548–555. URL: https://doi.org/10.1016/j.trpro.2022.06.047.

189. Ye F., Li Y., Hu J., Chen K. Investigation of particle dynamics in a disc rotating device by means of experiments and numerical simulations using DEM. *Journal of Chemical Engineering of Japan*. 2018. Vol. 51 (8). P. 631–640.

190. You Y., Guo J., Lv X., Wu Sh., Li Y., Tang K., Yu Y. Numerical simulation of particle mixing behavior in high speed shear mixer and cylinder mixer. *ISIJ International*. 2021. Vol. 61 (7). P. 2059–2065. URL: https://doi.org/10.2355/isijinternational.ISIJINT-2020-768.

191. You Y., Hu Q., Zheng Z., Guo J., Li G., Li Y., You Zh., Lv X. Effects of operation parameters on particle mixing performance in a horizontal high shear mixer. *International Journal of Chemical Reactor Engineering*. 2022. Vol. 20 (10). P. 1083–1094. URL: https://doi.org/10.1515/ijcre-2022-0063.

192. You Z. P., Zhang W. H., Ye X. P. Parameter optimization method of screw axis with variable diameters and different pitches based on PSO-BP NN. *Advanced Materials Research*. 2014. Vol. 1006–1007. P. 403–406. URL: https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMR.1006-1007.403.

193. Yu W., Zhang K., Li D., Zou D., Zhang Sh. Numerical modeling of concrete conveying capacity of screw conveyor based on DEM. *Computers and Concrete*. 2022. Vol. 29 (6). P. 361–374. URL: https://doi.org/10.12989/cac.2022.29.6.361.

194. Yuan J., Li M., Ye F., Zhou Z. Dynamic characteristic analysis of vertical screw conveyor in variable screw section condition. *Science Progress*. 2020. Vol. 103 (3). URL: https://doi.org/10.1177/0036850420951056.

195. Zareiforoush H., Komarizadeh M., Alizadeh M. Performance evaluation of a 15.5 cm screw conveyor during handling process of rough rice (Oriza Sativa L.) grains. *Nature and Science*. 2010. Vol. 8 (6). P. 66–74.

196. Zeng Y., Jia F., Meng X., Han Ya., Xiao Ya. The effects of friction characteristic of particle on milling process in a horizontal rice mill. *Advanced Powder Technology*. 018. Vol. 29 (5). P. 1280–1291. URL: https://doi.org/10.1016/j.apt.2018.02.021.

197. Zhang M., Niu H., Han Yu., Zhi Y., Yuan T., Zhang H., He Y., Tang Zh., Lan H. A simulation and experiment of the flow fluctuation characteristics of a fertilizer distribution apparatus with a screw from the perspective of the force chain. *Applied Sciences (Switzerland)*. 2024. Vol. 14 (3). 1122. URL: https://doi.org/10.3390/app14031122.

198. Zhang Z., Wang L., Wang Y., Chu X. Discrete element simulation on mixing of granular materials in rotated container. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2019. Vol. 106. P. 20–26. URL: https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2019.04.034.

199. Zheng C., Govender N., Zhang L., Wu C.-Y. GPU-enhanced DEM analysis of flow behavior of irregularly shaped particles in a full-scale twin screw granulator. *Particuology*. 2022. Vol. 61. P. 30–40. URL: https://doi.org/10.1016/j.partic.2021.03.007.

200. Zuo Z., Gong S., Xie G. Numerical simulation of granular mixing in a rotary drum using a generalized interpolation material point method. *Asia-Pacific Journal of Chemical Engineering*. 2020. Vol. 15 (2). e2426. URL: https://doi.org/10.1002/apj.2426.

201. Адамчук В. В. Аналіз рівнянь розгону частинки мінеральних добрив відцентровим розсіювальним органом. *Техніко-технологічні аспекти розвитку та випробування нової техніки і технологій для сільського господарства України*: збірка наукових праць УкрНДІПВТ ім. Л. Погорілого. 2004. С. 327–333.

202. Адамчук В. В. Дослідження загального випадку розгону мінеральних добрив відцентровим розсіювальним органом. *Вісник аграрної науки*. 2003. № 12. С. 51–57.

203. Адамчук В. В. Обґрунтування методики визначення параметрів відцентрового розсіювального органу. *Вісник аграрної науки*. 2005. № 2. С. 45–48.

204. Адамчук В. В. Теоретичне дослідження розгону мінеральних добрив конусним розсіювальним органом. *Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства*. Механізація сільськогосподарського виробництва. 2003. Вип. 21. С. 290–296.

205. Адамчук В. В. Теоретичне дослідження розгону мінеральних добрив розсіювальним органом. *Механізація сільськогосподарського виробництва*: збірка наукових праць Національного аграрного університету. 2003. С. 19–31.

206. Адамчук В. В. Уточнення теорії руху частинки матеріалу по ротаційних поверхнях. *Вісник аграрної науки*. 2003. № 9. С. 46–52.

207. Адамчук В. В., Булгаков В. М., Пилипака С. Ф., Веселовські М., Новак Я. Теорія відносного руху матеріальної частинки по поверхні горизонтального циліндра, який обертається навколо вертикальної осі. *Конструювання, виробництво та експлуатація сільськогосподарських машин*. *Загальнодержавний міжвідомчий науково-технічний збірник*. Кіровоград: КНТУ, 2011. Вип. 41, ч. 1. С. 3–14.

208. Адамчук О. В. Дослідження процесу руху частинки добрива по поверхні відцентрового розсіювального органа з похилою віссю обертання. *Механізація та електрифікація сільського господарства: збірка наукових праць ННЦ «ІМЕСГ»*. Глеваха, 2006. Вип. 90. С. 263–279.

209. Адамчук О. В. Дослідження розгону мінеральних добрив відцентровим розсівальним органом з похилою віссю обертання. *Техніко – технологічні аспекти розвитку та випробування нової техніки і технологій для сільського господарства України: збірка наукових праць Укр НДІПВТ ім. Л. Погорілого*. Дослідницьке, 2005. Вип. 8 (22), кн. 2. С. 228–236.

210. Адамчук О. В. Теоретичне дослідження процесу розгону добрива по поверхні відцентрового розсіювального органу з похилою віссю обертання. *Науковий вісник Національного аграрного університету*. 2006. № 101. С. 79–86.

211. Адамчук О. В. Теоретичне дослідження розгону добрив дисковим відцентровим розсіювальним робочим органом з похилою віссю обертання та радіально установленими лопатками. *Механізація та електрифікація сільського господарства: збірка наукових праць ННЦ «ІМЕСГ»*. Глеваха, 2013. Вип. 97, т. 1. С. 58–68.

212. Адамчук О. В. Теоретичне дослідження руху матеріальної частинки мінерального добрива по лопатці відцентрового розкидального органа. *Проблеми та перспективи розвитку технічних та біоенергетичних систем природокористування: конструювання та дизайн: Збірник тез доповідей XIX Міжнародної конференції науково-педагогічних працівників, наукових співробітників та аспірантів (м. Київ, 20–22 березня 2019 р.)*. К., 2019. С. 87–89.

213. Адамчук О. В. Теорія розгону добрив відцентровим розсіювальним робочим органом з похилою віссю обертання. *Механізація та електрифікація сільського господарства: збірка наукових праць ННЦ «ІМЕСГ»*. Глеваха, 2014. Вип. 99, т. 1. С. 150–166.

214. Бабка В. М. Аналітичне конструювання погонних ліній до плоских кривих. *Праці Таврійської державної агротехнічної академії. Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2007. Вип. 4, т. 36. С. 117–121.

215. Бабка В. М. Побудова траєкторій точок ланок плоских механізмів з допомогою ПЕОМ. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 1998. Вип. 63. С. 233–235.

216. Банга В., Дмитрів В. Теоретичні дослідження індивідуального роздавача-дозатора комбікормів. *Збірник наукових праць Луганського національного аграрного університету. Серія: Технічні науки*. 2007. Вип. 76 (99). С. 115–118.

217. Березовий М. Г., Пришляк В. М. Математична модель руху частинки гички при завантажуванні. *Збірник наукових праць Вінницького державного аграрного університету. Серія: Технічні науки*. 2012. Вип. 11, т. 1 (65). С. 78–88.

218. Біліченко М. Я. Основи теорії та розрахунку транспортних засобів механізації переміщення вантажів шахт: навч. посіб. Дніпропетровськ: НГУ, 2002. 102 с.

219. Бойко І. Г., Попов О. А. Дослідження руху частинки сипучого корму по поверхні подаючого конуса ротаційного дозатора. *Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства «Сучасні проблеми удосконалення технічних систем і технологій в тваринництві»*. Харків: ХНТУСГ, 2010. Вип. 95. С. 72–77.

220. Борак К. В. Фрикційна взаємодія ґрунту з поверхнею робочих органів ґрунтообробних машин. *Machinery & Energetics*. 2019. Vol. 10 (4). P. 157–162. https://doi.org/10.31548/machenergy.2019.04.157-162.

221. Борисенко В. Д., Устенко С. А., Устенко І. В. Геометричне моделювання кривих ліній і поверхонь у натуральній параметризації: монографія. Миколаїв: МНУ, 2018. 216 с.

222. Булгаков В. М., Адамчук О. В. Теоретичне дослідження відцентрового розкидача мінеральних добрив. *Вісник аграрної науки*. 2016. № 12. С. 51–57.

223. Булгаков В. М., Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Проектування полиці плуга за заданою геодезичною лінією – граничною траєкторією руху скиби. *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України*. 2010. Вип. 144, ч. 5. С. 20–35.

224. Булгаков В. М., Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф., Адамчук В. В. Дослідження руху частинки по плоскому диску, який обертається навколо перпендикулярної осі, нахиленої до горизонту. *Вісник Львівського національного аграрного університету: агроінженерні дослідження*. 2008. № 12 (2). С. 189–197.

225. Булгаков В. М., Пилипака С. Ф., Захарова Т. М., Калетнік Г. М., Яропуд В. М. Плоскі вертикальні криві, які забезпечують сталі тиск та швидкість руху матеріальної частинки. *Вібрації в техніці та технологіях*. Вип. 73, № 1. Вінницький національний аграрний університет. 2014. С. 5–12.

226. Василенко П. М. До теорії відцентрового розсіву. *Наукові праці Інституту машинознавства і сільськогосподарської механіки АН УРСР*. 1950. Т. ІІ.

227. Василенко П. М. До теорії руху часток матеріалу на ротаційних площинах. *Доповіді АН УРСР*. 1949. № 3.

228. Василенко П. М. Про рух матеріальних часток по ротаційних площинах. *Праці лабораторії машинобудування та проблем сільськогосподарської техніки АН УРСР*. 1950. Т. 1.

229. Васильєв О. Б. Геометричне моделювання результату обкатки відрізка планетарним механізмом. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2003. Вип. 72. С. 209–214.

230. Веселовски М., Новак Я., Войтюк Д., Пилипака С. Форма осі скиби при її штовханні по площині косого клина зі сталою швидкістю. *Механізація та електрифікація сільського господарства*. 2013. Вип. 98, т. 1. С. 558–574.

231. Войтюк Д. Г., Лінник М. К., Пилипака С. Ф. Дослідження руху матеріальної частинки по поверхні косого гелікоїда під дією сили власної ваги. *Техніка АПК*. 2006. № 12. С. 17–22.

232. Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Дослідження руху матеріальної частинки вздовж прямолінійних і криволінійних лопаток на горизонтальному диску, який обертається навколо вертикальної осі. *Науковий вісник Національного аграрного університету*. 2005. Вип. 92, ч. 1. С. 159–168.

233. Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Дослідження руху матеріальної частинки по горизонтальному диску, який обертається навколо вертикальної осі, за допомогою рухомого натурального тригранника і формул Френе. *Механізація та електрифікація сільського господарства.* Міжвідомчий тематичний науковий збірник. 2005. Вип. 89. С. 49–60.

234. Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Дослідження руху матеріальної частинки по шорсткій площині, яка здійснює горизонтальні криволінійні поступальні коливання. *Техніка АПК*. 2004. № 10–11. С. 26–28.

235. Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Знаходження траєкторій руху частинки по внутрішній поверхні вертикального циліндра при боковій подачі матеріалу. *Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства*. 2003. Вип. 20 «Механізація сільського господарства». С. 91–99.

236. Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Знаходження траєкторії руху матеріальної точки по гравітаційній розгортній поверхні на прикладі розгортного гелікоїда. *Механізація і енергетика сільського господарства. IV Міжнародна науково-технічна конференція MOTROL-2003*. К.: НАУ, 2003. Т. 6. С. 113–126.

237. Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Особливості руху частинки по гравітаційних лінійчатих поверхнях. *Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства*. 2003. Вип. 21 «Механізація сільського господарства». С. 75–88.

238. Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Побудова геодезичних ліній, як граничних траєкторій руху матеріальних частинок по поверхні. *Науковий вісник Національного аграрного університету*. 2003. Вип. 60. С. 138–141.

239. Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Проектування полиці плуга із розгортної поверхні за заданою граничною траєкторією руху скиби. *Вісник аграрної науки*. 1998. № 1. С. 47–49.

240. Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Розрахунок циліндричної поверхні, що забезпечує сталу силу тяги або сталу величину тиску матеріальної частинки, яка рухається по ній із постійною швидкістю. *Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства*. 2002. Вип. 11 «Механізація сільськогосподарського виробництва». С. 84–92.

241. Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Теоретичне дослідження руху матеріальних частинок у відцентрових апаратах із криволінійними лопатками і змінним кутом їх підйому. *Праці Таврійської державної агротехнічної академії*. 2006. Вип. 39. С. 11–20.

242. Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Знаходження траєкторій руху матеріальної частинки по внутрішній поверхні конуса із вертикальною віссю при боковій подачі матеріалу. *Науковий вісник Національного аграрного університету*. 2004. Вип. 72. С. 226–236.

243. Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф., Пилипака Т. С., Кремець Я. С. Новий підхід до проектування полиці плуга за заданою граничною траєкторією руху скиби.

Техніко-технологічні аспекти розвитку та випробування нової техніки і технологій для сільського господарства України. 2014. Вип. 18 (32), кн. 1. С. 208–219.

244. Воліна Т. М. Гвинтовий спуск, до аналітичного опису якого входить рівняння руху частинки по похилій площині. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К.: КНУБА, 2021. Вип. 100. С. 89–98. URL: https://doi.org/10.32347/0131-579X.2021.100.89-98.

245. Воліна Т. М. Дослідження руху частинки по спіральному жолобу під дією сили власної ваги. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К.: КНУБА, 2020. Вип. 99. С. 65–78. URL: https://doi.org/10.32347/0131-579x.2020.99.65-78.

246. Воліна Т. М. Дослідження руху частинки по шорсткій поверхні, яка утворена гвинтовим рухом синусоїди, під дією сили власної ваги. *Machinery & Energetics*. 2020. Vol. 11, no. 3. P. 187–194. URL: https://doi.org/10.31548/machenergy2020.03.187.

247. Воліна Т. М., Пилипака С. Ф. Дослідження руху частинки по зовнішній поверхні циліндра під час його поступальних коливань в горизонтальних площинах. *Machinery & Energetics*. 2020. Vol. 11, no. 4. P. 101–105. URL: https://doi.org/10.31548/machenergy2020.04.101.

248. Воліна Т. М., Пилипака С. Ф., Несвідомін А. В. Рух частинки по сферичному сегменту з вертикальними радіально встановленими лопатками. *Механіка та математичні методи*. 2021. Т. 3, № 1. С. 27–36. URL: https://doi.org/10.31650/2618-0650-2021-3-1-27-36.

249. Гевко Б. М. Математична модель руху зерна по рухомим поверхням висівних апаратів. *Збірник наукових праць Вінницького національного аграрного університету*. 2012. № 11, т. 1 (65). С. 113–118.

250. Гевко Б. М., Лотоцький Р. І., Пришляк В. М. Математичне моделювання руху зерна по рухомим поверхням висівних апаратів. *Сільськогосподарські машини*. 2013. Вип. 26. С. 27–35.

251. Гевко І. Б., Лещук Р. Я., Гудь В. З., Дмитрів О. Р., Дубиняк Т. С., Навроцька Т. Д., Круглик О. А. Гнучкі гвинтові конвеєри: проєктування, технологія виготовлення, експериментальні дослідження. 2019. 208 с.

252. Дмитрів В. Т., Городняк Р. В., Дмитрів Г. М., Підлісний В. В. Моделювання переміщення частинки конусним дисковим дозатором-змішувачем з криволінійними лопатками. *Збірник наукових праць Подільського державного аграрно-технічного університету*. 2016. Вип. 24, № 2. Технічні науки. С. 80–89.

253. Дмитрів В. Т., Дмитрів І. В., Городняк Р. В., Саган О. Я. Моделювання сходження сипкого матеріалу з відцентрового конусного дискового дозатора. *Автоматизація виробничих процесів у машинобудуванні та приладобудуванні*. 2021. Вип. 55. С. 43–51.

254. Драган А. П., Клендій М. Б. Обґрунтування конструкції робочого органа гвинтової секції комбінованого ґрунтообробного знаряддя. *Перспективні технології та прилади*. 2021. Вип. 18. С. 66–73. URL: https://doi.org/10.36910/6775-2313-5352-2021-18-10.

255. Запольський Л. Л. Геометричне моделювання крокуючого механізму з можливістю адаптування його стоп до опорної поверхні: автореф. дис. …канд. техн. наук: 05.01.01. Київ, 2008. 19 с.

256. Захарова Т. М. Геометричне конструювання робочої поверхні органу для розсіювання мінеральних добрив. *Вісник Сумського національного аграрного університету: науковий журнал*. Серія «Механізація та автоматизація виробничих процесів». Вип. 34, № 10. Суми: СНАУ. 2018. С. 38–40.

257. Захарова Т. М. Конструювання просторових кривих, що описуються рівняннями у функції довжини дуги, за допомогою супровідного тригранника вихідної кривої. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2013. Вип. 4, т. 57. С. 104–112.

258. Зубащенко Г. П. Взаємозв’язок між кутовими прискореннями шатуна і коромисла плоского шарнірного чотириланковика. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 1998. Вип. 63. С. 143–144.

259. Зубащенко Г. П., Корченко О. Г., Попкова Т. В., Макаренко М. Г., Щербина В. П. Геометричні методи кінематичного аналізу плоских важільних механізмів вищих класів. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2007. Вип. 77. С. 80–84.

260. Клендій М. Б. Ковзання частинки по похилій площині, всі точки якої здійснюють поступальні коливання у вертикальних площинах, паралельних горизонталям похилої площини. *Техніко-технологічні аспекти розвитку та випробування нової техніки і технологій для сільського господарства України*. 2014. Вип. 18, № 1. С. 294–300.

261. Клендій М. Б. Рух матеріальної частинки по похилій площині, всі точки якої в коливальному русі описують кола в цій же площині. *Сільськогосподарські машини*. 2013. С. 64–75.

262. Клендій М. Б., Пилипака С. Ф. Взаємодія похилої площини, всі точки якої при поступальному коливанні описують еліпси, із частинками матеріалу. *Механізація та електрифікація сільського господарства. Міжвідомчий тематичний науковий збірник*. 2013. Вип. 98, т. 1. С. 574–587.

263. Кресан Т. Рух частинки ґрунту по поверхні розгортного гелікоїда з горизонтальною віссю обертання і заданим кутом атаки. *Machinery & Energetics*. 2021. Vol. 12, no. 2. P. 67–75. URL: https://doi.org/10.31548/machenergy2021.02.067.

264. Лінник М. К., Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Дослідження руху матеріальної частинки по внутрішній поверхні вертикального циліндра, який здійснює планетарний рух. *Механізація та електрифікація сільського господарства. Міжвідомчий тематичний науковий збірник*. 2008. Вип. 92. С. 49–62.

265. Лінник М. К., Войтюк Д. Г., Пилипака С. Ф. Тригранник і формули Френе в задачах кінематики і динаміки матеріальної частинки у складному русі. *Науковий вісник Національного аграрного університету*. 2005. Вип. 80. С. 271–287.

266. Лінник М. К., Пилипака С. Ф. Дослідження руху матеріальної частинки по внутрішній поверхні стаціонарного циліндра. *Вісник аграрної науки*. 2006. № 2. С. 48–54.

267. Лінник М. К., Пилипака С. Ф. Дослідження руху матеріальної частинки по внутрішній поверхні горизонтального циліндра. *Вісник аграрної науки*. 2009. № 2. С. 52–56.

268. Люблін М. В., Токарчук О. А., Яропуд В. М. Особливості роботи крутопохилених гвинтових транспортерів при переміщенні зернової продукції. *Техніка, енергетика, транспорт АПК*. 2016. № 3 (95). С. 235–240.

269. Морозов І. В., Дудін О. В. Модель траєкторії руху зерна по поверхнях сільськогосподарських машин. *Вісник Харківського державного технічного університету сільського господарства. Механізація сільськогосподарського виробництва*. Харків: ХДТУСГ, 2003. Вип. 21. С. 124–131.

270. Несвідомін А. В. Дослідження руху частинки по шорсткій поверхні горизонтального параболічного циліндра. *Прикладна геометрія, дизайн та інноваційна діяльність: збірник тез доповідей І конференції студентів, аспірантів та молодих вчених*. К.: НТУУ «КПІ», 2013. С. 155–159.

271. Несвідомін А. В. Дослідження руху частинки по шорсткій поверхні двопорожнинного гіперболоїда обертання. *Прикладна геометрія, дизайн та об’єкти інтелектуальної власності та інноваційна діяльність студентів та молодих вчених: матеріали IV міжнародної науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених*. К.: НТУУ «КПІ», 2015. С. 172–175.

272. Несвідомін А. В. Моделювання руху матеріальної частинки по нерухомій шорсткій поверхні розгортного гелікоїда. *Прикладна геометрія, дизайн та інноваційна діяльність: збірник тез доповідей І конференції студентів, аспірантів та молодих вчених*. К.: НТУУ «КПІ», 2012. С. 106–108.

273. Несвідомін А. В. Моделювання руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні горизонтального циліндра в проекціях на орти локальних систем координат. *Геометричне та комп’ютерне моделювання*. 2011. Вип. 29. С. 23–29.

274. Несвідомін А. В. Моделювання руху частинок по шорстких поверхнях 2-го порядку на прикладі гіпара. *Проблеми та перспективи розвитку технічних та біоенергетичних систем природокористування: збірник тез доповідей XV міжнародної конференції науково-педагогічних працівників, наукових аспірантів та аспірантів*. К.: НУБіП України, 2015. С. 29–31.

275. Несвідомін В. М., Пилипака С. Ф., Бабка В. М., Несвідомін А. В. Maple-моделі руху частинки по шорстких нерухомих поверхнях 2-го порядку: монографія. Київ: ЦП «КОМПРИНТ». 2016. 176 с.

276. Ніколаєва Ю. М. Алгоритм розрахунку координат точок траєкторії руху часток по складеній поверхні. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 1991. Вип. 52. С. 108–109.

277. Пилипака С. Ф. Абсолютна траєкторія точки, яка рухається в системі супровідного тригранника Френе при переміщенні його по просторовій кривій. *Електротехніка і механіка*. 2007. № 1. С. 43–51.

278. Пилипака С. Ф. Кінематична інтерпретація руху супровідних тригранників Френе і Дарбу через внутрішні параметри кривих. *Науковий вісник Національного аграрного університету*. 1998. Вип. 4. С. 143–146.

279. Пилипака С. Ф. Теорія складного руху матеріальної точки на площині. Частина перша. Абсолютні швидкість і траєкторія. *Електротехніка і механіка*. 2006. № 1. С. 84–94.

280. Пилипака С. Ф. Теорія складного руху матеріальної точки на площині. Частина друга. Абсолютне прискорення. Задачі на динаміку точки. *Електротехніка і механіка*. 2006. № 2. С. 88–100.

281. Пилипака С. Ф. Тригранник і формули Френе: теорія складного руху матеріальної точки та задачі на кінематику та динаміку при її русі по шорстких поверхнях. *Академік П.М. Василенко – яскравий погляд у майбутнє*. Київ: Хай-Тек Пресс, 2012. С. 297–396.

282. Пилипака С. Ф., Бабка В. М. Абсолютні траєкторії точки, яка перебуває у переносному і відносному обертальних рухах із постійними кутовими швидкостями. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2008. Вип. 79. С. 28–33.

283. Пилипака С. Ф., Бабка В. М. Дослідження абсолютної траєкторії точки, яка рухається в системі супровідного тригранника плоскої кривої. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. 2007. Вип. 18. С. 18–23.

284. Пилипака С. Ф., Бабка В. М. Дослідження абсолютної швидкості точок, розташованих на ортах супровідного тригранника плоских і просторових кривих.

Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2008. Т. 38, №. 4. С. 44–51.

285. Пилипака С. Ф., Бабка В. М. Переміщення відрізка, кінці якого рухаються по просторових кривих з рівними швидкостями. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. 2009. № 22. С. 53–57.

286. Пилипака С. Ф., Бабка В. М. Плоска крива як сума траєкторій переносного і відносного руху точки по заданих кривих. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. 2009. Вип. 23. С. 55–60.

287. Пилипака С. Ф., Бабка В. М. Побудова еволют і евольвент плоских кривих, заданих натуральним рівнянням. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2008. Вип. 80. С. 25–30.

288. Пилипака С. Ф., Бабка В. М., Адамчук О. В. Теоретичне дослідження руху матеріальної точки по лопатці циліндричної форми. *Вібрації в техніці та технологіях*. 2013. № 1 (69). С. 42–50.

289. Пилипака С. Ф., Бабка В. М., Пилипака Т. С. Кінематика відрізка, кінці якого описують задані лінії у площині. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2007. Вип. 77. С. 36–42.

290. Пилипака С. Ф., Воліна Т. М., Захарова І. О. Переміщення частинки по обертовому рухомому вертикальному шнеку, обмеженому кожухом. *Управління розвитком складних систем*. 2022. Вип. 50. С. 115–121. URL: https://doi.org/10.32347/2412-9933.2022.50.115-121.

291. Пилипака С. Ф., Воліна Т. М., Захарова І. О., Рибенко І. О., Ребрій А. М. Дослідження складного руху точки по площині із застосуванням тригранника і формул Френе. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К.: КНУБА, 2023. Вип. 104. URL: https://doi.org/10.32347/0131-579X.2023.104.171-182.

292. Пилипака С. Ф., Воліна Т. М., Несвідомін А. В., Бабка В. М., Грищенко І. Ю. Рух частинки по горизонтальному циліндру, що обертається навколо власної осі. *Вісник Сумського національного аграрного університету*. Серія «Механізація та автоматизація виробничих процесів». 2022. Вип. 47, № 1. Суми: СНАУ. С. 30–35. URL: https://doi.org/10.32845/msnau.2022.1.5.

293. Пилипака С. Ф., Воліна Т. М., Несвідомін А. В., Бабка В. М., Шуляк І. С. Транспортування матеріальної частинки вертикальним шнеком. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. К.: КНУБА, 2022. Вип. 102. С. 165–180. URL: https://doi.org/10.32347/0131-579X.2022.102.165-180.

294. Пилипака С. Ф., Грищенко І. Ю., Пилипака Т. С. Дослідження руху частинки по внутрішній поверхні похилого циліндра, що обертається навколо власної осі. *MOTROL. Motoryzacja i energetyka rolnictwa*. 2010. Т. 12В. С. 115–120.

295. Пилипака С. Ф., Клендій М. Б. Дослідження руху матеріальної частинки по внутрішній поверхні вертикального циліндра, який здійснює обертальний і поступальний рухи. *Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства імені П. Василенка. Механізація сільського господарства*. Х.: ХНТУСГ, 2013. Вип. 135.

296. Пилипака С. Ф., Клендій М. Б. Рух частинки по поверхні циліндра, всі точки якого описують кола в горизонтальних площинах. *Вісник Сумського національного аграрного університету. Серія: Механізація та автоматизація виробничих процесів*. 2016. Вип. 10, № 3. С. 195–201.

297. Пилипака С. Ф., Клендій М. Б., Кремець Т. С., Клендій О. М. Рух частинки по шорсткій площині, яка здійснює поступальні коливання у вертикальному напрямі. *Вісник Сумського національного аграрного університету. Серія: Механізація і автоматизація виробничих процесів*. 2017. Вип. 10, № 32. С. 168–175.

298. Пилипака С. Ф., Клендій М. Б., Кресан Т. А. Рух частинки по гвинтовому коноїду, обмеженому вертикальним шорстким циліндром. *Вісник ХНТУ. Фундаментальні науки*. 2018. № 4 (67). С. 20–30.

299. Пилипака С. Ф., Несвідомін А. В. Maple-модель руху частинки по шорсткій внутрішній поверхні вертикального циліндра. *Геометричне та комп'ютерне моделювання*. 2011. Вип. 28. С. 19–24.

300. Пилипака С. Ф., Несвідомін А. В. Автоматизація моделювання руху частинки по гравітаційних поверхнях на прикладі похилої площини в системі Maple. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2011. Вип. 86. С. 64–69.

301. Пилипака С. Ф., Несвідомін А. В. Дослідження руху матеріальної частинки по шорсткій нерухомій поверхні гвинтового коноїда з вертикальною віссю. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. *Прикладна геометрія та інженерна графіка.* 2012. Вип. 4, т. 53. С. 123–129.

302. Пилипака С. Ф., Несвідомін А. В. Моделювання руху частинки по шорстких параболічних циліндрах довільного положення. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. *Прикладна геометрія та інженерна графіка.* 2013. Вип. 4, т. 56. С. 186–191.

303. Пилипака С. Ф., Несвідомін А. В. Моделювання руху частинки по шорсткій поверхні однопорожнинного гіперболоїда обертання. *Наукові нотатки. Міжвузівський збірник.* 2015. Вип. 48. С. 167–171.

304. Пилипака С. Ф., Несвідомін А. В. Моделювання руху частинки по шорсткій поверхні параболоїда обертання. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2012. Вип. 89. С. 39–44.

305. Пилипака С. Ф., Несвідомін А. В. Рух частинки по шорсткій вертикальній циліндричній поверхні, ортогональним перерізом якого є спіраль Архімеда. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2011. Вип. 88. С. 30–34.

306. Пилипака С. Ф., Несвідомін А. В. Рух частинки по шорсткій внутрішній поверхні вертикального циліндра з ортогональним перерізом у вигляді еліпса. *Праці Таврійського державного агротехнологічного університету*. *Прикладна геометрія та інженерна графіка.* 2011. Вип. 4, т. 51. С. 35–40.

307. Пилипака С. Ф., Несвідомін А. В. Траєкторії руху частинок по шорсткій похилій площині при їх боковій подачі. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 2011. Вип. 87. С. 36–41.

308. Пилипака С. Ф., Несвідомін А. В. Траєкторно-кінематичні властивості руху частинки по шорсткій поверхні гіперболічного циліндра довільного положення. *Сучасні проблеми моделювання: збірка праць*. 2014. Вип. 2. С. 76–82.

309. Пилипака С. Ф., Несвідомін В. М., Воліна Т. М., Бабка В. М., Грищенко І. Ю. Ковзання частинки по рухомій горизонтальній площині. *Сучасні проблеми моделювання*: зб. наук. Праць. МДПУ ім. Б. Хмельницького; гол. ред. кол.

Ю.М. Ковальов. Мелітополь: Видавництво МДПУ ім. Б. Хмельницького. 2022. Вип. 24. С. 147–155.

310. Пилипака С. Ф., Чепіжний А. В. Способи знаходження закону відносного руху частинки вздовж прямолінійної лопатки на відцентровому апараті. *Вісник Сумського національного аграрного університету. Серія «Механізація та автоматизація виробничих процесів»*. 2020. Вип. 3 (41). С. 35–39.

311. Семенцов В. І., Бойко І. Г. Методика і результати дослідження швидкості сходження частинки з диску відцентрового змішувача. *Вісник Харківського національного технічного університету сільського господарства «Технічні системи і технології тваринництва»*. Харьков: ХНТУСГ, 2015. Вип. 157. С. 52–56.

312. Серілко Л. С., Тимейчук О. Ю., Серілко Д. Л. Дослідження руху частинок сипкого матеріалу по циліндричній поверхні, яка здійснює коливальний рух вздовж осі симетрії. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування. Серія: Технічні науки*. 2016. Вип. 1. С. 165–171.

313. Серілко Л. С., Щурик В. О., Серілко Д. Л. Розрахунок параметрів живильників горизонтальних гвинтових конвеєрів. *Вісник Національного університету водного господарства та природокористування*. 2014. Вип. 4. Технічні науки. С. 300–307.

314. Смаглій В. І. Рух матеріальної частинки по криволінійній лопатці з вертикальною віссю обертання. *Вісник аграрної науки*. 2013. № 2. С. 47–50.

315. Штуков М. К., Гіліс Р. М., Ярошенко В. Ф. Динамічний аналіз руху частинки вздовж прямолінійної напрямної диска, що обертається. *Механізація та електрифікація сільського господарства*: республіканський міжвідомчий тематичний науково-технічний збірник. К.: Урожай, 1991. Вип. 73. С. 66–71.

316. Щербань Є. О. Геометрична модель розподілу прискорень під час руху ланки в просторі. *Прикладна геометрія та інженерна графіка*. 1991. Вип. 52. С. 98–100.

ДОДАТКИ

Додаток А

«ПОГОДЖЕНО»	«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Проректор з наукової роботи та інноваційної діяльності Національного університету біоресурсів і природокористування України	Директор ТОВ «Авіс Зернотрейд»
____________ В. М. Кондратюк	____________ Р. В. Лаврик
«___» __________ 2021 р.	«___» __________ 2021 р.

АКТ

про впровадження/використання результатів докторської дисертаційної роботи

Даним актом стверджується, що результати дисертаційної роботи докторантки Національного університету біоресурсів і природокористування України Воліної Тетяни Миколаївни, присвяченої дослідженню закономірностей руху матеріальної частинки по поверхнях, яка представлена на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 131 – Прикладна механіка, впроваджені у ТОВ «Авіс Зернотрейд».

1. Вид впроваджених результатів. Науково-технічна продукція конструювання скальпелятора з оригінальною формою решіт для первинного очищення зернового матеріалу від дрібних домішок.

2. Новизна результатів. Запропоновано конструкцію решіт скальпелятора у формі хвилястої поверхні, якою є циліндрична поверхня з горизонтальним розташуванням прямолінійних твірних і поперечним перерізом у вигляді синусоїди.

3. Практичне впровадження/використання результатів. Передбачається впровадження у виробництво конструкції скальпелятора з оригінальною формою решіт для первинного очищення зернового матеріалу від дрібних домішок у формі хвилястої поверхні, якою є циліндрична поверхня з горизонтальним розташуванням прямолінійних твірних і поперечним перерізом у вигляді синусоїди.

4. Значущість отриманих результатів. Використання запропонованої конструкції решіт скальпелятора забезпечить підвищення ефективності очищення зернової суміші від дрібних домішок та підвищення продуктивності скальпелятора.

5. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, які складають основу дисертаційної роботи, виконані у

Національному університеті біоресурсів і природокористування України у відповідності до плану наукових досліджень НДІ техніки і технологій за темою 110/9-пр-2020 «Обгрунтування методів підвищення виробництва зерна в сільськогосподарських підприємствах інтенсифікацією інженерного менеджменту» (номер державної реєстрації 0120U102086).

Від Національного університету біоресурсів і природокористування України	Від ТОВ «Авіс Зернотрейд»
Начальник науково-дослідної частини	Головний інженер
______________ В. В. Отченашко	______________ М. С. Маніліч
«20» ____09____ 2021 р.	«10» ______________ 2021 р.

Директор НДІ техніки і технологій,
керівник теми 110/9-пр-2020

______________ І. Л. Роговський

«17» ____09____ 2021 р.

Науковий консультант

______________ С. Ф. Пилипака

«17» ____09____ 2021 р.

Докторант

______________ Т. М. Воліна

«15» ____09____ 2021 р.

Додаток Б

«ПОГОДЖЕНО»	«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Проректор з наукової роботи та інноваційної діяльності Національного університету біоресурсів і природокористування України	Директор ТОВ «Зернова Індустрія»
____________ В. М. Кондратюк	____________ О. Г. Гребеник
«___» ____________ 2021 р.	«17» 06 ____________ 2021 р.

АКТ
про впровадження/використання результатів
докторської дисертаційної роботи

Даним актом стверджується, що результати дисертаційної роботи докторантки Національного університету біоресурсів і природокористування України Воліної Тетяни Миколаївни, присвяченої дослідженню закономірностей руху матеріальної частинки по поверхнях, яка представлена на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 131 – Прикладна механіка, впроваджені у ТОВ «Зернова Індустрія».

1. Вид впроваджених результатів: геометрико-кінематичне обґрунтування конструкції та режимів роботи робочого органу автоматизованого пробовідбірника зернових та олійних культур для відбору зразків з автотранспорту для лабораторного випробування.

2. Новизна результатів. Запропоновано конструкцію робочого органу автоматизованого пробовідбірника зернових та олійних культур для відбору зразків з автотранспорту, яка представляє собою єдине ціле з циліндра та співвісної смуги гвинтового коноїда і яка обертається навколо спільної вертикальної осі, а також оптимізовано режими його роботи.

3. Практичне впровадження/використання результатів. Передбачається застосування конструкції робочого органу автоматизованого пробовідбірника зернових та олійних культур для відбору зразків з автотранспорту для лабораторного випробування у вигляді вертикального шнека, обмеженого співвісним рухомим циліндром.

4. Значущість отриманих результатів. Використання запропонованої конструкції робочого органу автоматизованого пробовідбірника забезпечить мінімізацію пошкодження оболонок зернових та олійних культур при відборі зразків з автотранспорту для лабораторного випробування.

5. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, які складають основу дисертаційної роботи, виконані у

Національному університеті біоресурсів і природокористування України у відповідності до плану наукових досліджень НДІ техніки і технологій за темою 110/9-пр-2020 «Обґрунтування методів підвищення виробництва зерна в сільськогосподарських підприємствах інтенсифікацією інженерного менеджменту» (номер державної реєстрації 0120U102086).

Від Національного університету біоресурсів і природокористування України	Від ТОВ «Зернова Індустрія»
Начальник науково-дослідної частини	Головний інженер
______ В. В. Отченашко	______ Ю. В. Остапенко
« 04 » 09 2021 р.	« 10 » 06 2021 р.

Директор НДІ техніки і технологій, керівник теми 110/9-пр-2020

______ І. Л. Роговський

« 03 » 09 2021 р.

Науковий консультант

______ С. Ф. Пилипака

« 08 » 06 2021 р.

Докторант

______ Т. М. Воліна

« 08 » 06 2021 р.

Додаток В

«ПОГОДЖЕНО»
Проректор з наукової роботи та
інноваційної діяльності
Національного університету
біоресурсів і природокористування
України

_______ В. М. Кондратюк

«__» ______________ 2021 р.

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Директор
ТОВ «Виробничо-комерційне
підприємство «НОТЕХС»

_______ С. М. Романченко

«__» ______________ 2021 р.

АКТ
про впровадження/використання результатів
докторської дисертаційної роботи

Даним актом стверджується, що результати дисертаційної роботи докторантки Національного університету біоресурсів і природокористування України Воліної Тетяни Миколаївни, присвяченої дослідженню закономірностей руху матеріальної частинки по поверхнях, яка представлена на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 131 – Прикладна механіка, впроваджені у ТОВ «Виробничо-комерційне підприємство «НОТЕХС».

1. Вид впроваджених результатів: геометрико-кінематичне обґрунтування конструкції та режимів роботи транспортеру в'яжучого бетонної суміші (портландцементу) до дозаторів автоматизованого бетонно-розчинного вузла цеху з виробництва залізобетонних виробів та багатопустотних плит перекриття.

2. Новизна результатів. Запропоновано конструкцію транспортеру в'яжучого бетонної суміші у вигляді похилого кожуха, який представляє собою циліндричну поверхню, всередині якого обертається активний робочий орган (шнек – гвинтова поверхня).

3. Практичне впровадження/використання результатів. Передбачається впровадження у виробництво транспортера в'яжучого бетонної суміші (портландцементу) до дозаторів автоматизованого бетонно-розчинного вузла цеху з виробництва залізобетонних виробів та багатопустотних плит перекриття у вигляді похилої циліндричної поверхні, всередині якої обертається активний робочий орган у формі гвинтової поверхні.

4. Значущість отриманих результатів. Використання запропонованої конструкції транспортера забезпечить підвищення продуктивності транспортування в'яжучого бетонної суміші до дозаторів автоматизованого

бетонно-розчинного вузла з одночасним забезпеченням його однорідної щільності.

5. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, які складають основу дисертаційної роботи, виконані у Національному університеті біоресурсів і природокористування України у відповідності до плану наукових досліджень НДІ техніки і технологій за темою 110/9-пр-2020 «Обґрунтування методів підвищення виробництва зерна в сільськогосподарських підприємствах інтенсифікацією інженерного менеджменту» (номер державної реєстрації 0120U102086).

Від Національного університету біоресурсів і природокористування України

Начальник науково-дослідної частини

______________ В. В. Отченашко

«04» ______09______ 2021 р.

Від ТОВ «Виробничо-комерційне підприємство «НОТЕХС»

Головний інженер

______________ Р. С. Журавльов

«24» ______06______ 2021 р.

Директор НДІ техніки і технологій, керівник теми 110/9-пр-2020

______________ І. Л. Роговський

«03» ______09______ 2021 р.

Науковий консультант

______________ С. Ф. Пилипака

«24» ______06______ 2021 р.

Докторант

______________ Т. М. Воліна

«24» ______06______ 2021 р.

Додаток Г

«ПОГОДЖЕНО»	**«ЗАТВЕРДЖУЮ»**
Проректор з наукової роботи та інноваційної діяльності Національного університету біоресурсів і природокористування України	Директор ФГ Шепіль Я. А.
____________ В. М. Кондратюк	____________ Л. І. Крючкова
«31» ____________ 2021 р.	«31» ____________ 2021 р.

АКТ

про впровадження/використання результатів докторської дисертаційної роботи

Даним актом стверджується, що результати дисертаційної роботи докторантки Національного університету біоресурсів і природокористування України Воліної Тетяни Миколаївни, присвяченої дослідженню закономірностей руху матеріальної частинки по поверхнях, яка представлена на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 131 – Прикладна механіка, впроваджені у ФГ Шепіль Я.А.

1. Вид впроваджених результатів. Геометрико-кінематичне обґрунтування конструкції робочого органу для розкидання сипучих матеріалів.

2. Новизна результатів. Запропоновано конструкцію робочого органу для розкидання сипучих матеріалів, що містить диск з лопатками, вісь яких є криволінійною у вигляді дуги кола, дотичної до радіуса диска у його центрі, причому криволінійна вісь випукла у напрямку, протилежному напрямку обертання диска.

3. Практичне впровадження/використання результатів. Передбачається застосування конструкції робочого органу для розкидання сипучих матеріалів у вигляді сферичного диска з криволінійними лопатками.

4. Значущість отриманих результатів. Використання запропонованої конструкції робочого органу для розкидання сипучих матеріалів забезпечить підвищення продуктивності роботи агрегату шляхом збільшення ширини його захвату з одночасним зменшенням витрат палива під час його роботи.

5. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, які складають основу дисертаційної роботи, виконані у Національному університеті біоресурсів і природокористування України у

відповідності до плану наукових досліджень НДІ техніки і технологій за темою 110/9-пр-2020 «Обгрунтування методів підвищення виробництва зерна в сільськогосподарських підприємствах інтенсифікацією інженерного менеджменту» (номер державної реєстрації 0120U102086).

Від Національного університету біоресурсів і природокористування України	Від ФГ Шепіль Я.А.
	Головний інженер
Начальник науково-дослідної частини	____________ Р. П. Устименко
____________ В. В. Отченашко	«31» серпня 2021 р.
«31» серпня 2021 р.	

Директор НДІ техніки і технологій,
керівник теми 110/9-пр-2020

____________ І. Л. Роговський

«31» серпня 2021 р.

Науковий консультант

____________ С. Ф. Пилипака

«31» серпня 2021 р.

Докторант

____________ Т. М. Воліна

«31» серпня 2021 р.

Додаток Д

«ПОГОДЖЕНО»	«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Проректор з наукової роботи та інноваційної діяльності Національного університету біоресурсів і природокористування України	Директор ФГ Лисянський М. В.
________ В. М. Кондратюк	________ М. В. Лисянський
«31» 08 ________ 2021 р.	«31» серпня ________ 2021 р.

АКТ

про впровадження/використання результатів докторської дисертаційної роботи

Даним актом стверджується, що результати дисертаційної роботи докторантки Національного університету біоресурсів і природокористування України Воліної Тетяни Миколаївни, присвяченої дослідженню закономірностей руху матеріальної частинки по поверхнях, яка представлена на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук за спеціальністю 131 – Прикладна механіка, впроваджені у ФГ Лисянський М. В.

1. Вид впроваджених результатів. Геометрико-кінематичне обґрунтування конструкції відцентрового дискового розсіювача мінеральних добрив.

2. Новизна результатів. Запропоновано конструкцію робочого органу апарату відцентрового типу для розсіювання мінеральних добрив у формі сферичного диска, укомплектованого вертикальними лопатками, встановленими у радіальному напрямі.

3. Практичне впровадження/використання результатів. Передбачається застосування конструкції робочого органу відцентрового дискового розсіювача мінеральних добрив у формі сферичного диску, укомплектованого вертикальними лопатками, встановленими у радіальному напрямі.

4. Значущість отриманих результатів. Використання запропонованої конструкції робочого органу відцентрового розсіювача мінеральних добрив забезпечить збільшення ширини захвату агрегату і зниження витрат палива при його роботі.

5. Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження, які складають основу дисертаційної роботи, виконані у

Національному університеті біоресурсів і природокористування України у відповідності до плану наукових досліджень НДІ техніки і технологій за темою 110/9-пр-2020 «Обґрунтування методів підвищення виробництва зерна в сільськогосподарських підприємствах інтенсифікацією інженерного менеджменту» (номер державної реєстрації 0120U102086).

Від Національного університету біоресурсів і природокористування України	Від ФГ Лисянський М.В.
	Головний інженер
Начальник науково-дослідної частини	______________ М. А. Луценко
	«31» серпня 2021 р.
______________ В. В. Отченашко	
«31» серпня 2021 р.	

Директор НДІ техніки і технологій,
керівник теми 110/9-пр-2020

______________ І. Л. Роговський

«31» серпня 2021 р.

Науковий консультант

______________ С. Ф. Пилипака

«31» серпня 2021 р.

Докторант

______________ Т. М. Воліна

«31» серпня 2021 р.

Додаток Е

«ПОГОДЖЕНО»
Проректор з науково-педагогічної роботи Національного університету біоресурсів і природокористування України

_______________ В. Д. Шинкарук

«17» ________09________ 2021 р.

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Проректор з наукової роботи та інноваційної діяльності Національного університету біоресурсів і природокористування України

_______________ В. М. Кондратюк

«___» _______________ 2021 р.

АКТ

про впровадження/використання результатів досліджень
докторантки Воліної Тетяни Миколаївни у навчальний процес
кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну
Національного університету біоресурсів і природокористування України

Ми, що нижче підписались, декан факультету конструювання та дизайну НУБіП України Ружило З. В., завідувач кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну НУБіП України Пилипака С. Ф. і директор науково-дослідного інституту техніки і технологій НУБіП України Роговський І. Л. підтверджуємо, що результати дисертаційної роботи Воліної Тетяни Миколаївни на здобуття наукового ступеня доктора наук зі спеціальності 131 – Прикладна механіка, яка виконувалась відповідно до науково-дослідної роботи № 110/9-пр-2020 «Обґрунтування методів підвищення виробництва зерна в сільськогосподарських підприємствах інтенсифікацією інженерного менеджменту» (номер державної реєстрації 0120U102086), отримали своє практичне впровадження в навчальному процесі при викладанні дисципліни «Дороги внутрішньогосподарського призначення» в розділі «Проектування автомобільних доріг» підготовки фахівців освітнього ступеня «Магістр» спеціальності 275 – Транспортні технології (на автомобільному транспорті) Національного університету біоресурсів і природокористування України.

Декан факультету конструювання
та дизайну НУБіП України — З. В. Ружило

Завідувач кафедри нарисної геометрії,
комп'ютерної графіки та дизайну
НУБіП України — С. Ф. Пилипака

Директор науково-дослідного
інституту техніки і технологій
НУБіП України — І. Л. Роговський

Додаток Ж

«ПОГОДЖЕНО»
Проректорка з науково-педагогічної роботи та цифрової трансформації Національного університету біоресурсів і природокористування України

_____________ Олена ГЛАЗУНОВА

«03» ______10______ 2024 р.

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Проректорка з наукової роботи та інноваційної діяльності Національного університету біоресурсів і природокористування України

_____________ Оксана ТОНХА

«04» ______10______ 2024 р.

АКТ

про впровадження/використання результатів досліджень докторантки Воліної Тетяни Миколаївни у навчальний процес Національного університету біоресурсів і природокористування України

Ми, що нижче підписались, декан факультету конструювання та дизайну НУБіП України Зіновій РУЖИЛО, завідувач кафедри будівництва НУБіП України Ігор ЯКОВЕНКО і завідувач кафедри технічного сервісу та інженерного менеджменту імені Миколи Петровича Момотенка НУБіП України Іван РОГОВСЬКИЙ підтверджуємо, що результати дисертаційної роботи Воліної Тетяни Миколаївни на здобуття наукового ступеня доктора наук зі спеціальності «05.01.01 – прикладна геометрія, інженерна графіка», яка виконувалась відповідно до науково-дослідної роботи № 110/9-пр-2020 «Обґрунтування методів підвищення виробництва зерна в сільськогосподарських підприємствах інтенсифікацією інженерного менеджменту» (номер державної реєстрації 0120U102086), отримали своє практичне впровадження у дипломне проектування фахівців освітнього ступеня «Магістр» за ОНП «Будівництво та цивільна інженерія», у роботу наукових гуртків кафедри будівництва, а також при викладанні дисциплін «Нарисна геометрія та інженерна графіка», «Комп'ютери та комп'ютерні технології» підготовки фахівців освітнього ступеня «Бакалавр» спеціальності 192 – Будівництво та цивільна інженерія Національного університету біоресурсів і природокористування України.

Декан факультету конструювання та дизайну НУБіП України — Зіновій РУЖИЛО

Завідувач кафедри будівництва НУБіП України — Ігор ЯКОВЕНКО

Керівник теми № 110/9-пр-2020 — Іван РОГОВСЬКИЙ

Додаток З

«ПОГОДЖЕНО»
Проректор з наукової роботи
Сумського національного
аграрного університету, доктор
економічних наук, професор

___________ Ю. І. Данько

«___» 09 ___________ 2021 р.

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Ректор Сумського національного
аграрного університету, доктор
сільськогосподарських наук,
професор, академік Національної
академії аграрних наук України

___________ В. І. Ладика

«24» 09 ___________ 2021 р.

АКТ

про впровадження/використання результатів досліджень
докторантки Воліної Тетяни Миколаївни у навчальний процес
кафедри проектування технічних систем
Сумського національного аграрного університету

Ми, що нижче підписались, декан інженерно-технологічного факультету СНАУ Довжик М. Я., завідувач кафедри проектування технічних систем СНАУ Семірненко Ю. І. і завідувач науково-дослідної частини СНАУ Пасько О. В. підтверджуємо, що результати дисертаційної роботи Воліної Тетяни Миколаївни на здобуття наукового ступеня доктора наук зі спеціальності 131 – Прикладна механіка, яка виконувалась відповідно до науково-дослідної роботи 110/9-пр-2020 «Обґрунтування методів підвищення виробництва зерна в сільськогосподарських підприємствах інтенсифікацією інженерного менеджменту» (номер державної реєстрації 0120U102086), отримали своє практичне впровадження в навчальному процесі при викладанні дисципліни «Інженерні мережі і конструкції в АПК» в розділі «Промислові будівлі в АПК» підготовки фахівців освітнього ступеня «Магістр» спеціальності 208 «Агроінженерія» Сумського національного аграрного університету.

Декан інженерно-технологічного
факультету СНАУ — М. Я. Довжик

Завідувач кафедри проектування
технічних систем СНАУ — Ю. І. Семірненко

Завідувач науково-дослідної
частини СНАУ — О. В. Пасько