

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ
І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ

ВОЛІНА ТЕТЯНА МИКОЛАЇВНА

УДК 514.758:531.36

ГЕОМЕТРО-КІНЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ
ПАРАМЕТРІВ РУХУ ЧАСТИНОК ПО ПОВЕРХНЯХ
ПІД ДІЄЮ ПРИКЛАДЕНИХ СИЛ

05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка»

Реферат дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора технічних наук

Київ – 2025

Дисертацією є кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису

Роботу виконано у Національному університеті біоресурсів і природо-користування України
Міністерства освіти і науки України

Науковий консультант – доктор технічних наук, професор
ПИЛИПАКА Сергій Федорович,
Національний університет біоресурсів
і природокористування України,
завідувач кафедри нарисної геометрії,
комп'ютерної графіки та дизайну

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, професор
ПЛОСКИЙ Віталій Олексійович,
Київський національний університет
будівництва і архітектури,
завідувач кафедри архітектурних конструкцій

доктор технічних наук, професор
АУШЕВА Наталія Миколаївна,
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут
імені Ігоря Сікорського»,
завідувачка кафедри цифрових технологій
в енергетиці

доктор технічних наук, професор
ШОМАН Ольга Вікторівна,
Національний технічний університет
«Харківський політехнічний інститут»,
завідувачка кафедри геометричного моделювання
та комп'ютерної графіки

Захист відбудеться «29» травня 2025 року о 10⁰⁰ годині на засіданні докторської спеціалізованої вченої ради Д 26.004.11 у Національному університеті біоресурсів і природокористування України, за адресою: м. Київ, вул. Героїв Оборони, 15, навчальний корпус № 3, кімната 301

З дисертацією можна ознайомитися у науковій бібліотеці Національного університету біоресурсів і природокористування України, за адресою: м. Київ, вул. Героїв Оборони, 13, навчальний корпус № 4, кімната 41а

Вчений секретар докторської
спеціалізованої вченої ради

Юрій РОМАСЕВИЧ

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Одним зі складових елементів технологічного процесу роботи сільськогосподарських та інших машин є переміщення частинок по поверхнях їх робочих органів. При цьому кількісні та якісні показники цього технологічного процесу значною мірою обумовлені конструктивними та кінематичними елементами руху самих робочих органів та кінематичними елементами руху по них частинок матеріалу. На цих конструктивних параметрах та кінематичних елементах і зосереджується увага дослідників.

В усіх випадках визначення кінематичних характеристик руху частинки має свої особливості, що залежать від форми, конструктивних параметрів робочих органів, характеру взаємодії з технологічним матеріалом, властивостей самого матеріалу тощо. Важливо мати закономірності такої взаємодії, оскільки це дозволяє покращувати і вдосконалювати конструкції робочих органів машин.

Виходячи зі сказаного, актуальність досліджень обумовлена необхідністю знаходження аналітичних залежностей, які описують рух частинок матеріалу по рухомих та стаціонарних поверхнях, шляхом розроблення геометро-кінематичних методів їх визначення, з метою забезпечення найбільш ефективного виконання відповідного технологічного процесу.

Для аналітичного опису руху матеріалу, який складається з окремих частинок, застосовуються різні підходи. Це пояснюється складністю процесів, які відбуваються при взаємодії частинок між собою. Тому в багатьох випадках рух твердого тіла при обмежених його розмірах можна розглядати як рух частинки, а її рух – як рух матеріальної точки.

Необхідно, проте, мати на увазі, що оскільки реальні частинки технологічного матеріалу в тій чи іншій мірі відрізняються від матеріальних точок та значень сил тертя та опору середовища, що враховуються диференціальними рівняннями руху, у багатьох випадках змінюють свій характер під час руху, то і значення кінематичних елементів руху, отримані в результаті вирішення цих рівнянь, також певною мірою будуть відрізнятися від дійсних. Тому і отримані розв'язки практичних задач слід розглядати як наближені, що водночас не знижує їх значущість, оскільки в багатьох випадках немає необхідності в отриманні точних значень вказаних величин, а при необхідності ці величини завжди можуть бути перевірені та уточнені на основі експериментальних даних. Крім того, отримані результати надають залежності розвитку процесів, які допомагають знаходити необхідні рішення.

Перші фундаментальні дослідження, присвячені питанням теорії руху матеріальної точки або тіла по поверхні, належать Галілею, Ньютону, Гамільтону, Ейлеру, Лагранжу та ін.

Практичне значення цих досліджень полягає у вивченні взаємодії частинок технологічного матеріалу із робочими поверхнями різних машин і приладів, що дозволяє удосконалювати їх форму. Особливо актуальні такі дослідження у сфері сільсько-господарського виробництва, де у ролі частинок можна розглядати частинки ґрунту, зерна, мінеральних добрив, подрібненої маси тощо. Нині накопичено достатньо об'ємний матеріал з даного питання, хоча і вирішено ще далеко не всю сукупність задач, що мають практичне значення для сільськогосподарської техніки. Великий вклад у розвиток теорії руху частинок сільськогосподарських матеріалів по поверхнях внесли українські вчені – академіки НААН П. М. Василенко, П. М. Заїка, В. В. Адамчук. Однак певний час цей напрям досліджень залишався поза увагою фахівців з прикладної геометрії незважаючи на те, що поверхня і її диференціальні характеристики відіграють важливу роль у вивченні цього питання. У зв'язку з цим виникає науково-технічна проблема розроблення методології розв'язання задач теорії руху частинки, що можуть знайти своє застосування не тільки у сільсько-господарському машинобудуванні, але й в інших галузях техніки, що потребують знання законів руху частинки матеріалу по тих чи інших видах поверхонь, які застосовуються в робочих органах машин.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тема дисертації і отримані результати відповідають актуальним напрямам науково-технічної політики

України відповідно до Постанови Кабінету Міністрів України № 476 від 30.04.2024 року «Про затвердження переліку пріоритетних тематичних напрямів наукових досліджень і науково-технічних розробок на період до 31 грудня року, наступного після припинення або скасування воєнного стану в Україні» в частині, що стосується дослідження новітніх проблем механіки суцільного середовища і механіки машин, а також розвитку новітніх галузей математичного моделювання актуальних проблем природничих наук.

Роботу виконано на кафедрі нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну Національного університету біоресурсів і природокористування України у відповідності до плану наукових досліджень науково-дослідного інституту техніки і технологій за темою № 110/9-пр-2020 «Обґрунтування методів підвищення виробництва зерна в сільсько-господарських підприємствах інтенсифікацією інженерного менеджменту» (номер державної реєстрації 0120U102086).

Мета та завдання дослідження. *Мета роботи* – створення методологічної основи визначення параметрів руху частинок по поверхнях під дією прикладених сил та її практична реалізація.

Поставлена мета потребувала виконання відповідних завдань дослідження:

- провести критичний аналіз наукової літератури, що стосується руху частинок по різних поверхнях, а також у напрямках геометричного моделювання об'єктів, процесів та явищ; проаналізувати основні підходи до складання диференціальних рівнянь руху частинок по рухомих і нерухомих поверхнях;
- розробити узагальнений метод дослідження закономірностей руху частинок по стаціонарних гвинтових поверхнях за допомогою параметричних рівнянь у функції часу;
- запропонувати метод дослідження закономірностей руху частинок по поверхнях, що здійснюють коливальний рух;
- розробити метод дослідження закономірностей руху частинок по поверхнях обертання, які здійснюють обертальний рух навколо власної осі, за допомогою параметричних рівнянь у функції часу;
- за допомогою параметричних рівнянь у функції часу запропонувати метод дослідження закономірностей руху частинок, які одночасно контактують з двома поверхнями;
- розглянути застосування тригранника і формул Френе при русі частинок по стаціонарних поверхнях;
- розглянути застосування тригранника і формул Френе для дослідження закономірностей складного руху частинок по рухомих поверхнях;
- впровадити результати виконаних досліджень у практику конструювання органів машин, робочі поверхні яких взаємодіють із частинками технологічного матеріалу, а також у навчальний процес.

Об'єкт дослідження – процес руху частинок по стаціонарних та рухомих шорстких поверхнях.

Предмет дослідження – визначення закономірностей руху частинок по рухомих і нерухомих поверхнях під дією прикладених сил.

Методи дослідження. Розроблення геометро-кінематичних методів визначення параметрів руху частинок по поверхнях здійснювалося на основі методів класичної механіки, аналітичної та диференціальної геометрії, супровідного тригранника кривих ліній та формул Френе. Реалізація запропонованих методів виконувалася за допомогою комп'ютерної графіки з використанням середовищ динамічного моделювання і символічної алгебри. Обґрунтованість і достовірність наукових положень та отриманих результатів забезпечується реалізацією розроблених методів визначення параметрів руху частинок по поверхнях у середовищі *MatLab*, візуалізацією отриманих результатів засобами комп'ютерної графіки та впровадженням результатів роботи у практику. Часткові результати, отримані за допомогою узагальнених моделей, повністю збігаються з результатами інших авторів.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у наступному:

вперше:

- виведено узагальнені диференціальні рівняння ковзання частинки по гвинтовій поверхні під дією її власної ваги при заданій кривій осьового перерізу;
- описано рух частинки у гвинтовому конвеєрі зі шнеком, що обертається всередині нерухомого циліндричного кожуха при зміні кута нахилу осі конвеєра від горизонтального до вертикального положення;
- описано рух частинки у вертикальному циліндрі з жорстко закріпленим у ньому співвісним шнеком, які обертаються навколо спільної осі;
- складено диференціальні рівняння відносного і абсолютного руху частинки, яка ковзає по поверхні, що здійснює коловий коливальний поступальний рух;
- здійснено візуалізацію траєкторій ковзання частинки не у вигляді графіків, а з прив'язкою до аксонометричного зображення поверхні;

отримало подальший розвиток:

- застосування супровідного тригранника напрямної кривої у ролі рухомої системи координат і формул Френе при складному русі частинки;
- складання диференціальних рівнянь руху частинки як по нерухомих, так і по рухомих поверхнях із застосуванням внутрішніх криволінійних координат поверхні, що представляє собою узагальнений спосіб розв'язання подібних задач;
- застосування в ролі незалежної змінної довжини дуги траєкторії як у простому, так і складному русі.

Для всіх випадків складених диференціальних рівнянь здійснено їх розв'язання із застосуванням чисельних методів інтегрування і побудовано траєкторії ковзання по поверхнях.

Практичне значення одержаних результатів полягає у знаходженні аналітичного опису залежностей руху частинок по поверхнях, що були використані при проектуванні технічних поверхонь, які контактують із технологічним матеріалом, та знайшли своє застосування в інших технічних задачах. Зокрема, на основі отриманих теоретичних результатів удосконалено конструкції машин відцентрової дії, що підтверджується трьома патентами на корисну модель.

Особистий внесок здобувачки. Усі положення, що виносяться на захист і складають наукову новизну отримано особисто авторкою даного дисертаційного дослідження. У виданнях за участю співавторів результати здобувачки вказано у списку її публікацій за темою дисертації. У дисертації не використовувалися результати кандидатської дисертації здобувачки.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертаційних досліджень повною мірою оприлюднено і апробовано на науково-практичних зібраннях різного рівня: XI, XVI, XVII та XVIII Міжнародних науково-практичних конференціях «Обуховські читання» (м. Київ, 2016, 2021, 2023, 2024 pp.); XIX, XXI, XXIII–XXVI Міжнародних науково-практичних конференціях «Сучасні проблеми геометричного моделювання» (м. Мелітополь, 2017, 2019, 2021–2024 pp.); International Scientific and Practical Conference «Prospects for the development of technical sciences in EU countries and Ukraine» (м. Влоцлавек, Республіка Польща, 2018 p.); XXIV Міжнародній науково-практичній конференції «Технології XXI сторіччя» (м. Суми, 2018 p.); 1st–7th International Conferences «Design, Simulation, Manufacturing: The innovation exchange» (м. Суми, 2018 p.; м. Луцьк, 2019 p.; м. Харків, 2020 p.; м. Львів, 2021 p.; м. Познань, Республіка Польща, 2022 p.; м. Високі Татри, Словацька Республіка, 2023 p.; м. Пльзень, Чеська Республіка, 2024 p.); International Scientific and Practical Conference «Technical sciences: history, the present time, the future, EU experience» (м. Влоцлавек, Республіка Польща, 2019 p.); 1st–5th Grabchenko's International Conferences on Advanced Manufacturing Processes (м. Одеса, 2019–2023 pp.); VIII Міжнародній науково-практичній конференції «Актуальні проблеми інженерної механіки» (м. Одеса, 2021 p.); XI Всеукраїнській науково-практичній конференції «Прикладна геометрія, інженерна графіка

та об'єкти інтелектуальної власності» (м. Київ, 2022 р.); XI, XII Міжнародних науково-технічних онлайн конференціях «Крамаровські читання» з нагоди 117-ї річниці від дня народження доктора технічних наук, професора, члена-кореспондента ВАСГНІЛ, віце-президента УАСГН Крамарова Володимира Савовича (1906–1987) (м. Київ, 2023, 2024 рр.).

Публікації. За результатами досліджень опубліковано 71 наукову працю, з яких 24 статті у періодичних наукових виданнях, включених до категорії «А» Переліку наукових фахових видань України та/або в закордонних виданнях, проіндексованих у базах даних Web of Science Core Collection та/або Scopus, 16 статей у наукових виданнях, включених до Переліку наукових фахових видань, 3 патенти України на корисні моделі, 28 тез наукових доповідей.

Структура та обсяг дисертації. Загальний обсяг дисертації становить 357 сторінок. Робота складається з анотації українською та англійською мовами, вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел із 316 найменувань та додатків. Основний текст дисертації містить 114 рисунків.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У **вступі** сформульовано проблему, що вирішується, обґрунтовано її актуальність, приведено мету та завдання дослідження, наукову новизну й практичну цінність результатів роботи, а також наведено її загальну характеристику.

У **першому розділі** приведено основні відомості з теорії руху матеріальної точки. Механіка в залежності від умов конкретних задач використовує різні фізичні моделі. Найпростішою з них є матеріальна точка. Під матеріальною точкою розуміють фізичну модель, яка відповідає наступним умовам: розміри тіла надзвичайно малі у порівнянні з відстанню, яку воно проходить внаслідок руху; всі точки тіла рухаються однаково. У працях багатьох авторів (академіків П. М. Василенка, П. М. Заїки, В. В. Адамчука) поняття матеріальної точки асоціюється із поняттям частинки, що більше відповідає практичному змісту робіт щодо руху сипкого технологічного матеріалу.

Довільне макроскопічне тіло або їх систему можна подумки розбити на малі частинки, які взаємодіють між собою та кожна з яких розглядається як матеріальна точка. Тоді вивчення руху довільної системи тіл зводиться до вивчення системи матеріальних точок.

Усі основні типи поверхонь, що застосовуються в конструкціях сільськогосподарських та інших машин, за характером своїх кінематичних елементів руху можуть бути поділені на чотири групи: стаціонарні; такі, що здійснюють поступальний, обертальний рухи або поєднують їх. Рух частинки по стаціонарній поверхні вважається простим. Окремо виділяють складний рух – такий рух матеріального об'єкту, при якому він одночасно рухається відносно якоїсь системи відліку, а та, у свою чергу, рухається відносно іншої системи відліку. При цьому розглядається питання про взаємозв'язок параметрів рухів матеріальної точки або тіла у цих двох системах відліку. Відносно даних досліджень мається на увазі рух частинки по поверхні, яка в свою чергу теж рухається.

Для дослідження руху частинки по поверхні необхідно мати аналітичні залежності, які описують цей рух. Зокрема, цього потребують численні інженерні задачі, які стосуються взаємодії робочих органів машин з частинками технологічного матеріалу.

Якщо лінія є однопараметричною множиною точок, то поверхня – двопараметрична (двовимірна). Її параметричні рівняння мають вигляд:

$$X = X(u, v); Y = Y(u, v); Z = Z(u, v), \quad (1)$$

де u, v – незалежні змінні (параметри).

При наданні конкретних значень параметрам $u = u_A$ і $v = v_A$ на поверхні з'являться дві координатні лінії, які перетинаються в точці A (рис. 1). Таким чином, положення кожної точки на поверхні може бути визначено двома числами: значеннями криволінійних координат u і v тих координатних ліній різних сімей, які проходять через цю точку.

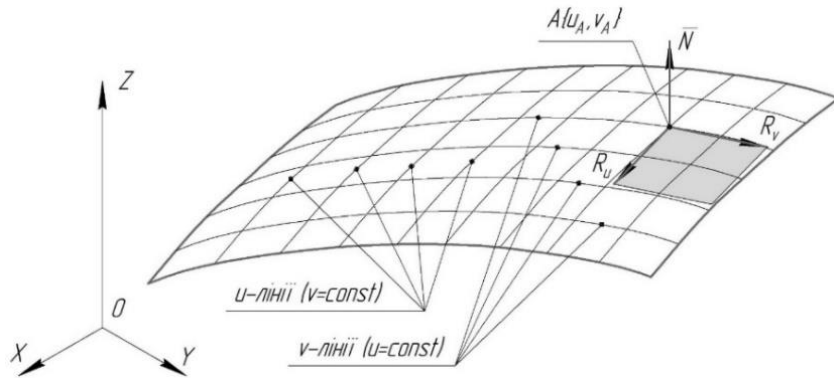


Рис. 1. Криволінійна координатна сітка на поверхні загального виду, дотична площина і нормаль до поверхні

Якщо між незалежними змінними u і v поверхні встановити певний взаємозв'язок у вигляді $u = u(v)$, $v = v(u)$ або через третю змінну – час t у вигляді $u = u(t)$, $v = v(t)$, то рівняння (1) стають рівняннями однієї змінної u, v або t , тобто вони опишуть лінію на поверхні. Такий взаємозв'язок між змінними поверхні називається внутрішнім рівнянням лінії на ній. При складанні диференціальних рівнянь руху матеріальної точки по поверхні траєкторія є шуканою кривою, яка в диференціальних рівняннях представлена внутрішнім рівнянням. Якщо внутрішнє рівняння лінії на поверхні задано, то параметричні рівняння (1) стають залежними лише від однієї змінної, тобто вони стають рівняннями кривої на поверхні.

Поверхню можна задати не тільки параметричними рівняннями, але й рівняннями у явній або неявній формі. Така форма запису поверхонь зустрічається в курсі класичної механіки при аналітичному описі руху частинки по цих поверхнях. У роботі використано тільки параметричні рівняння поверхонь, які віднесені до криволінійної координатної сітки.

Основним законом динаміки є другий закон Ньютона: похідна по часу від кількості руху матеріальної точки дорівнює діючій на неї силі:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \vec{F}. \quad (2)$$

У роботі маса частинки є сталою, тому рівняння (2) можна записати у наступному вигляді:

$$m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} \quad \text{або} \quad m\vec{w} = \vec{F}, \quad (3)$$

де m – маса частинки, кг; $\vec{w} [x'', y'', z'']$ – вектор абсолютного прискорення; $\vec{F}$ – результуючий вектор прикладених до частинки сил.

До таких сил відносяться: сила ваги mg ($g = 9,81 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$), сила реакції R поверхні та сила тертя $F=fR$ (f – коефіцієнт тертя). Сила реакції R спрямована вздовж вектора нормалі $\vec{N}$ до поверхні, а сила тертя F – в протилежну сторону ковзання частинки – вектору швидкості її руху.

Існує дві задачі динаміки: знаючи закон руху матеріальної точки необхідно знайти діючі на неї сили; знаючи діючі на матеріальну точку сили, а також початкове положення і швидкість, знайти закон руху точки. Друга задача в динаміці є основною. Якщо перша задача не представляє труднощів для розв'язання і зводиться до диференціювання, то друга зводиться до складання диференціальних рівнянь, які можна розв'язати в аналітичному вигляді тільки для найпростіших випадків. У роботі розглядається друга задача.

При складному русі точки для знаходження коріолісового прискорення можна застосовувати правило М. Є. Жуковського. В існуючих працях саме такий підхід і застосовується. Запропоновано дещо спростити знаходження вектора абсолютного прискорення при складному русі частинки. Це досягається наступним чином:

1) віднесення рухомої поверхні до криволінійних координат і додавання двох рухів (відносного в рухомій системі координат і переносного самої рухомої системи). У результаті

отримуємо абсолютну траєкторію руху, диференціюванням якої знаходимо як абсолютну швидкість, так і абсолютне прискорення в проекціях на осі нерухомої системи координат;

2) використання в ролі рухомої системи координат супровідного тригранника Френе траєкторії. У такому випадку незалежною змінною є довжина дуги s траєкторії переносного руху тригранника. Це дає можливість застосування формул Френе і отримання вектора абсолютного прискорення в проекціях на орти тригранника.

У першому випадку знаходження відносного руху частинки здійснюється в нерухомій системі координат, в другому – у рухомій системі тригранника.

Формули Френе відіграють виключно велику роль в диференціальній геометрії, зокрема в теорії просторових кривих. Вони мають кінематичну інтерпретацію. Прикметно, що визначення вектора абсолютного прискорення відбувається диференціюванням тільки одного векторного рівняння. У кінцевому підсумку складові прискорення групуються за ортами тригранника, тобто отримуємо їх у вигляді проекцій на його орти.

Теоретичною базою для проведення досліджень були роботи науковців: з питань теорії руху частинок: В. В. Адамчука, В. М. Булгакова, С. Ф. Пилипаки, В. М. Несвідоміна, М. Б. Клендія, Т. А. Кресан, П. М. Василенка, П. М. Заїки; у галузі геометричного моделювання та комп'ютерної графіки: Ю. І. Бадаєва, В. Д. Борисенка, О. Ю. Браїлова, Ю. М. Ковальова, В. М. Корчинського, В. Г. Лі, В. М. Малкіної, В. О. Плоского, К. О. Сазонова, Ю. М. Тормосова, О. В. Шоман, В. П. Юрчука та ін.

З урахуванням проведеного аналізу праць щодо руху частинки по поверхні було обрано напрям дослідження з більш широким залученням геометричних методів, зокрема, диференціальної геометрії. Це викликано також тим, що серед науковців прикладної геометрії цій темі було приділено мало уваги, а праці, які з'явилися останніми роками, потребують подальшого розвитку.

Другий розділ присвячено аналітичному опису руху частинки по стаціонарних гвинтових поверхнях у функції часу. Аналітичний опис руху частинок по стаціонарних поверхнях є важливим для розуміння багатьох фізичних явищ та є достатньо дослідженим. З практичної точки зору серед стаціонарних поверхонь на особливу увагу заслуговують гвинтові, оскільки вони широко поширені як гравітаційні спуски для різних матеріалів та робочі поверхні для сепарування породи в гірничій промисловості. Характер руху частинки по гвинтовій поверхні з вертикальним розташуванням осі залежить від форми цієї поверхні – кривої перерізу жолоба вертикальною площиною, яка проходить через вісь гвинтової поверхні. Виведення аналітичних залежностей закону руху дає можливість досліджувати вплив конструктивних параметрів жолоба на режими руху частинок по ньому.

У вертикальній площині системи координат ρOh , яка збігається з площиною Oxz декартової системи координат ($Oh \equiv Oz$, $Op \equiv Ox$), параметричні рівняння лінії осьового перерізу у функції незалежної змінної u в загальному випадку мають вигляд:

$$\rho = \rho(u); h = h(u). \quad (4)$$

Математично процедура утворення гвинтової поверхні описується параметричними рівняннями:

$$X = \rho \cos \alpha; Y = \rho \sin \alpha; Z = h + b\alpha, \quad (5)$$

де α – кут повороту площини з лінією осьового перерізу (4) навколо вертикальної осі Oh (друга незалежна змінна поверхні (5)), град; $b = H/2\pi$ – гвинтовий параметр, який залежить від кроку гвинтової поверхні H (стала величина).

Вираз для знаходження швидкості руху частинки по гвинтовій поверхні має вигляд:

$$V = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{\alpha'^2(\rho^2 + b^2) + 2bh'_u u' \alpha' + u'^2(h_u'^2 + \rho_u'^2)}. \quad (6)$$

Узагальнені диференціальні рівняння руху частинки у функції часу t по стаціонарній гвинтовій поверхні (5) з лінією осьового перерізу (4) запишуться:

$$\alpha'' = - \left(\frac{\alpha' f \rho}{AV} + \frac{b \rho'_u}{A^2} \right) (\alpha'^2 \rho h'_u + g \rho'_u + u'^2 B) + \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
& + 2\alpha' u' \rho'_u \left[\frac{\alpha' f b \rho'_u}{AV} - \frac{\rho}{A^2} (\rho'^2_u + h'^2_u) \right]; \\
u'' &= u'^2 \left[\frac{u' f \rho B}{AV} - \frac{\rho^2 (\rho''_u \rho'_u + h''_u h'_u) + b^2 \rho''_u \rho'_u}{A^2} \right] + \\
& + \left(\frac{\rho h'_u}{A^2} + \frac{u' f \rho'_u}{AV} \right) (2b\alpha' u' \rho'_u - g\rho) + \alpha'^2 \rho \left[\frac{\rho'_u (\rho^2 + b^2)}{A^2} - \frac{u' f \rho h'_u}{AV} \right]; \\
R &= \frac{m}{A} [\alpha'^2 \rho^2 h'_u - 2b\alpha' u' \rho'^2_u + \rho(g\rho'_u - u'^2 B)],
\end{aligned}$$

де $A = \sqrt{\rho^2 h'^2_u + \rho'^2_u (\rho^2 + b^2)}$; $B = h'_u \rho''_u - h''_u \rho'_u$. Похідні по змінній u позначено відповідним нижнім індексом, а похідні по часу t наведено без позначення індексом.

Розв'язання системи диференціальних рівнянь (7) дає можливість знайти необхідні характеристики руху частинки: траєкторію, швидкість і реакцію поверхні.

В окремому випадку, коли обидва рівняння (4) є лінійними, вони опишуть пряму лінію – прямолінійну твірну гвинтової поверхні. Якщо ця пряма нахилена до горизонтальної площини під кутом β , то утвореною поверхнею буде косий гелікоїд (рис. 2), а рівняння (4) матимуть вигляд:

$$\rho = u \cos \beta; \quad h = u \sin \beta. \quad (8)$$

Відповідно $\rho'_u = \cos \beta$; $h'_u = \sin \beta$; $\rho''_u = 0$; $h''_u = 0$. Після підстановки цих виразів у (7) було здійснено чисельне інтегрування, результати якого представлено на рис. 2, рис. 3.

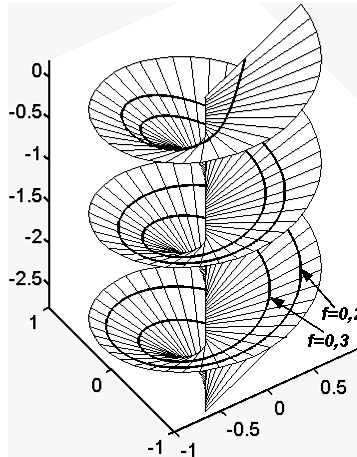


Рис. 2. Траєкторії руху частинок з різним коефіцієнтом тертя по поверхні косого гелікоїда

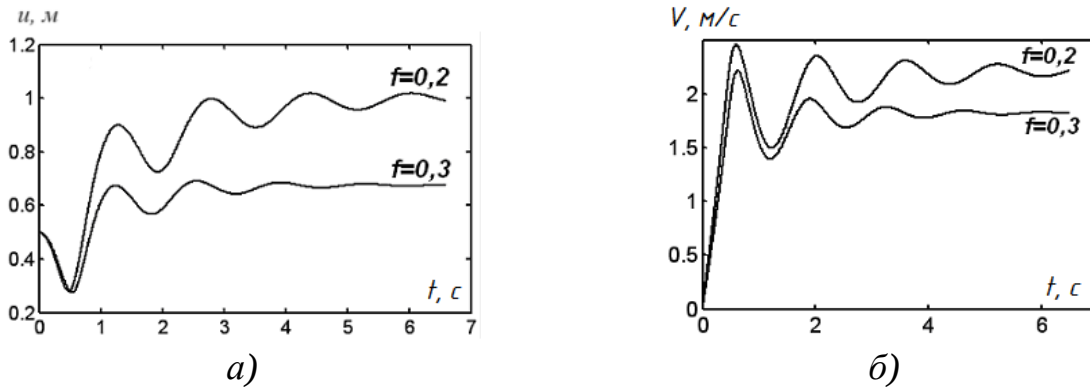


Рис. 3. Графіки, що характеризують рух частинок з різним коефіцієнтом тертя по поверхні косого гелікоїда: а) зміна відстані u вздовж твірної гелікоїда; б) зміна швидкості руху частинки

З графіків на рис. 3 видно, що з часом t рух частинки по поверхні стабілізується. Кінематичні характеристики руху частинки після його стабілізації можуть бути знайдені аналітично. При цьому кутова швидкість обертання частинки $\alpha' = \omega = \text{const}$, $\alpha'' = 0$, $u'' = u' = 0$. При підстановці цих значень у (7) знаходимо наступні вирази:

– відстань від осі поверхні вздовж її твірної до точки на гвинтовій лінії – траєкторії ковзання частинки:

$$u = \frac{b}{\sqrt{2}f} \sqrt{1 - f^2 + \sqrt{\frac{4f^2}{\cos^2 \beta} + (1 - f^2)^2}}; \quad (9)$$

– кутова швидкість обертання частинки:

$$\omega = \sqrt{\frac{gu \sin \beta}{u^2 \cos^2 \beta + b^2}}; \quad (10)$$

– швидкість руху частинки після його стабілізації:

$$V = \omega \sqrt{u^2 \cos^2 \beta + b^2}; \quad (11)$$

– нормальна реакція поверхні:

$$R = \frac{m \cos \beta}{\sqrt{u^2 + b^2}} (\omega^2 u^2 \sin \beta + gu). \quad (12)$$

Отримані за формулами (9) і (11) величини для відповідних коефіцієнтів тертя повністю узгоджуються з графіками на рис. 3.

Якщо кривою осьового перерізу гвинтової поверхні є дуга кола радіуса r , зміщена на величину d (рис. 4, а), то її рівняння (4) набувають вигляду:

$$\rho = r \cos u + d; \quad h = r \sin u. \quad (13)$$

Для того, щоб рівняння (13) описували дугу півкола випуклістю вниз, незалежна змінна u повинна змінюватися у межах $u = \pi \dots 2\pi$ (рис. 4, б). При $d=0$ гвинтову поверхню буде описано чвертю кола ($u = 1,5\pi \dots 2\pi$) (рис. 4, в).

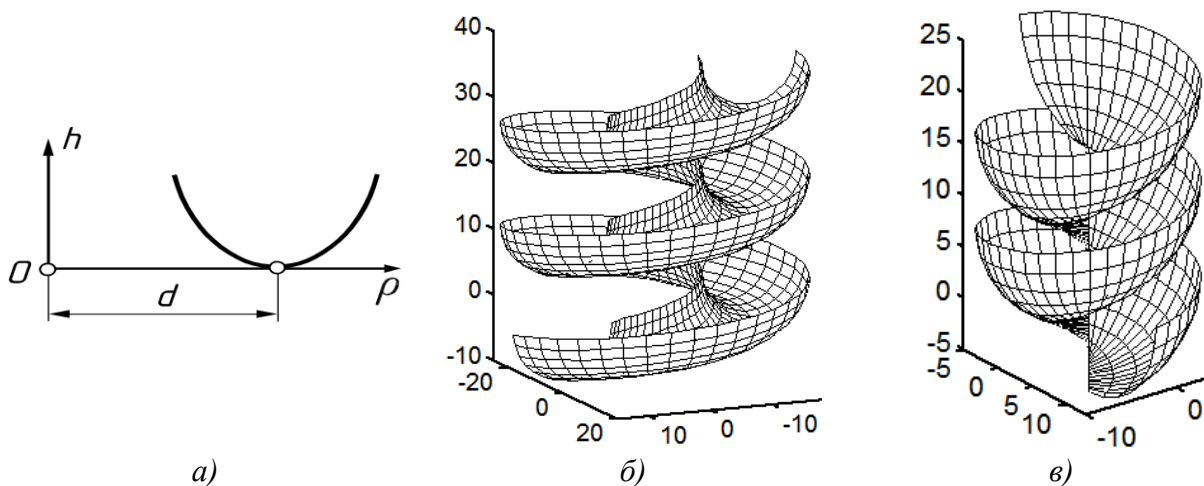


Рис. 4. До утворення гвинтової поверхні за допомогою кривої осьового перерізу: а) крива осьового перерізу зі зміщенням вздовж осі ρ на величину d ; б) гвинтова поверхня у загальному вигляді; в) гвинтова поверхня при $d=0$

Чисельне інтегрування рівнянь (7) здійснювалося для трьох випадків в залежності від кута φ підйому нижньої гвинтової лінії (дна жолоба), який визначався через співвідношення сталих b і d : $tg \varphi = \frac{b}{d}$:

- 1) $b/d < f$ – за наявності початкової швидкості частинка з часом зупиниться;
- 2) $b/d > f$ – рух частинки з часом стабілізується, траєкторією її руху стає гвинтова лінія, швидкість наближається до сталого значення;

3) $b/d = f$ – незалежно від величини і напрямку початкової швидкості траєкторія руху частинки з часом асимптотично наближається до гвинтової лінії – дна жолобу, а швидкість руху асимптотично наближається до нуля.

Було досліджено гвинтовий спуск із декількома жолобами (рис. 5, б). За осьовий переріз було взято синусоїду:

$$\rho = u; h = c \sin a u, \quad (14)$$

де c і a – сталі, які задають амплітуду і період (частоту) синусоїди (рис. 5, а).

Частинка подавалася на поверхню в точку A (рис. 6, а) – на вершину гребня. Початкова швидкість задавалася в радіальному напрямку до осі або від осі гвинтової поверхні.

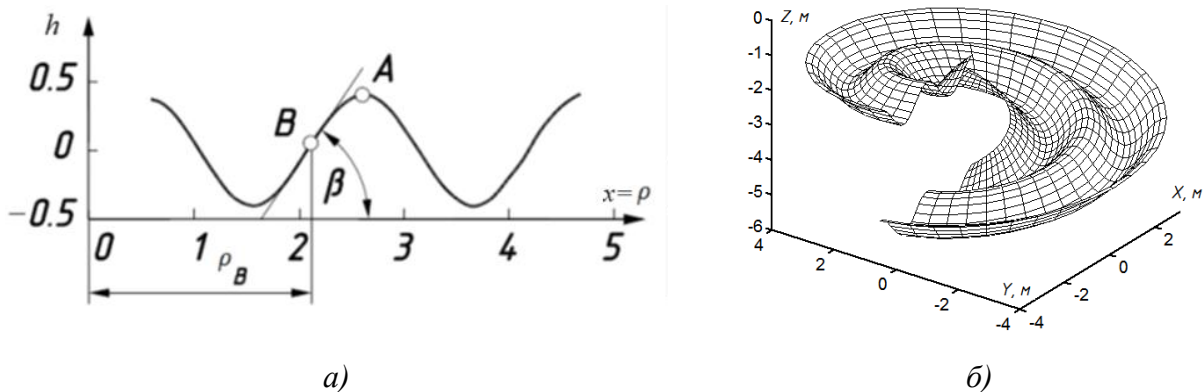


Рис. 5. Гвинтова поверхня, у якій кривою осьового перерізу є синусоїда: а) крива осьового перерізу (14) при $c=0,4$, $a=3$, і $\rho=0,2\pi \dots 1,5\pi$; б) утворена гвинтова поверхня в межах одного кроку при $b=0,5$

У першому випадку частинка починає рухатися з точки A до осі поверхні і опускається в жолоб, по якому продовжує рух вниз – криву позначено цифрою 1 (рис. 6). У такому випадку швидкість стабілізується і наближається до постійного значення (рис. 6, б). Після стабілізації траєкторією руху є гвинтова лінія на поверхні.

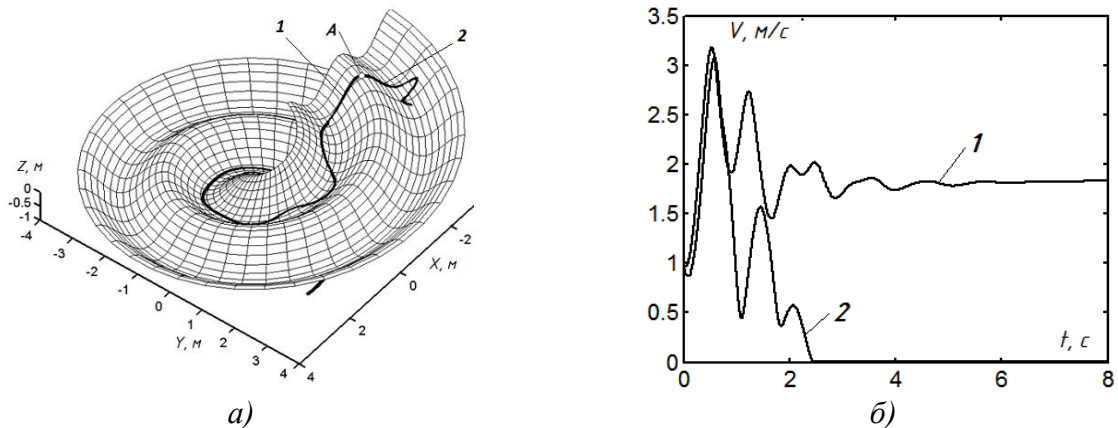


Рис. 6. Рух частинки по гвинтовій поверхні (цифрою 1 позначено траєкторію з початковою швидкістю до осі поверхні, цифрою 2 – від осі поверхні): а) траєкторії руху частинки, що починаються в точці A ; б) графіки зміни швидкості руху

У другому випадку частинка починає рухатися з точки A від осі поверхні і, подолавши певний шлях, зупиняється – криву позначено цифрою 2 (рис. 6). Пояснюється це тим, що по мірі віддалення від осі поверхні кут нахилу гвинтових ліній зменшується. Коли кут нахилу гвинтової лінії дна жолоба стає менше кута тертя, рух стає неможливим.

Дослідження показали, що при перехідному періоді частинки можуть переходити на сусідній, більш віддалений жолоб. Такий перехід залежить від коефіцієнта тертя. По мірі

зменшення коефіцієнта тертя, відстань до жолобу, по якому рухаються групи частинок, збільшується. Це дозволяє підібрати такі конструктивні параметри поверхні, що після стабілізації руху групи частинок з близьким коефіцієнтом тертя будуть рухатися по окремих жолобах. Ця особливість дозволяє краще розділяти матеріал за фрикційною ознакою у порівнянні з існуючими сепараторами з одним жолобом.

При нульовій амплітуді кривої осьового перерізу ($a=c=0$) синусоїда (14) перетворюється у горизонтальну пряму, а поверхня – у гвинтовий коноїд (рис. 7, а). Система (7) значно спрощується. Результат її розв'язку представлено на рис. 7.

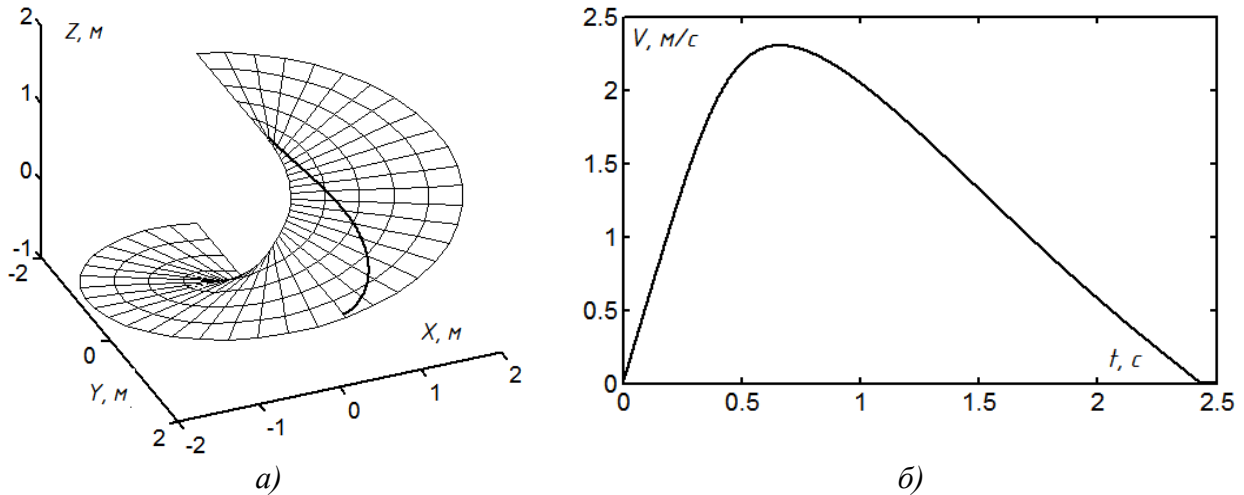


Рис. 7. Графічні ілюстрації руху частинки по поверхні гвинтового коноїда (час руху $t=2,5$ с, $b=0,35$ м, $f=0,3$): а) траєкторія ковзання; б) графік зміни швидкості V ковзання

Із рис. 7 видно, що частинка спочатку розганяється і віддаляється від осі поверхні, потім її швидкість зменшується із-за зменшення кута нахилу поверхні і частинка зупиняється. Отже, поверхня гелікоїда з кутом нахилу твірних $\beta=0$ не може бути гвинтовим спуском.

Третій розділ присвячено аналітичному опису руху частинки по рухомих поверхнях у функції часу. Параметричні рівняння у функції часу можуть застосовуватися для виявлення закономірностей руху частинок по поверхнях, які здійснюють різного роду рухи. Рухомою шорстка площина є найпростішим робочим органом різних механізмів та систем. Спочатку розглянемо коливальний рух.

Циліндрична хвиляста поверхня із поперечним перерізом у вигляді синусоїди (рис. 5, а) суттєво змінюватиме траєкторії ковзання частинок у порівнянні з горизонтальною площиною. Її рівняння запишуться:

$$X = u; \quad Y = v; \quad Z = c \sin av, \quad (15)$$

де c – амплітуда; a – частота (сталі величини), u, v – незалежні змінні поверхні: u – довжина прямолінійної твірної, v – відстань вздовж осі OY .

Поверхня здійснює поступальні коливання таким чином, що всі її точки описують кола (рис. 8). Абсолютний рух частинки розглядався щодо нерухомої системи координат $OXYZ$.

Закон відносного руху (ковзання) частинки по поверхні (15) має вигляд:

$$v'' = \frac{1}{A^2} [r\omega^2 \sin \omega t + ac(a^2 c v'^2 \sin av - g) \cos av] - \frac{f v'}{AV} B; \quad (16)$$

$$u'' = r\omega^2 \cos \omega t - \frac{f v'}{AV} B; \quad R = \frac{m}{A} B,$$

де $A = \sqrt{1 + a^2 c^2 \cos^2 av}$; $B = [g + ac(r\omega^2 \cos av \sin \omega t - a v'^2 \sin av)]$;

$V = \sqrt{u'^2 + v'^2 (1 + a^2 c^2 \cos^2 av)}$, ω – кутова швидкість обертання точок поверхні, які описують кола радіуса r .

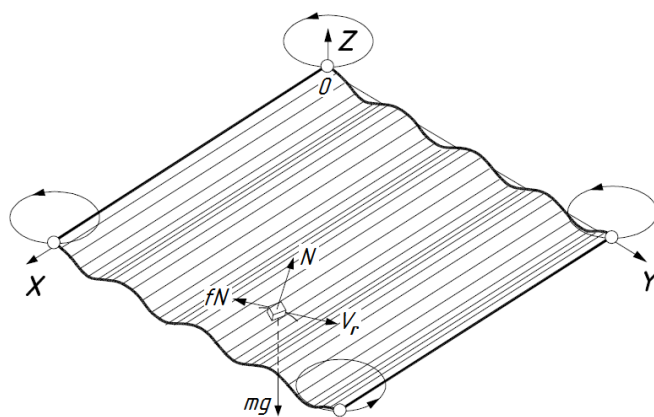


Рис. 8. Схема колових коливань хвилястої поверхні та прикладені до частинки сили

Параметри поперечного перерізу хвилястої поверхні були прийняті такими, що співвідношення амплітуди до періоду становило 1:20. При менших співвідношеннях відбувається відрив частинки від поверхні. Вказане співвідношення не є усталеним, воно залежить від радіуса r кіл, по яких відбувається коливання поверхні, кутової швидкості ω , коефіцієнта тертя f .

Розглядалися три випадки: коли діаметр кіл переносного руху поверхні дорівнює періоду, є більшим та меншим за нього.

Якщо діаметр кіл переносного руху поверхні дорівнює періоду ($2r=T$), траєкторією ковзання частинки є періодична просторова крива (рис. 9, а), при цьому криволінійне ковзання частинки поширюється у напрямі, близькому до напрямку осі OY , і частинка при своєму русі долає впадини і гребні поверхні. Напрямок поширення такого руху може відбуватися як у напрямі осі OY , так і в протилежну сторону. Поведінка частинки залежить від точки попадання на поверхню. Нормальна реакція поверхні набуває знакоперемінного характеру. Тому для уникнення відриву частинки від поверхні кутова швидкість ω не повинна перевищувати критичного значення.

Якщо діаметр кіл переносного руху поверхні менший за період ($2r < T$), то після перехідного періоду траєкторія ковзання частинки стає замкнутою (рис. 9, б). Якщо діаметр кіл переносного руху поверхні більший за період ($2r > T$), перехідний період залежить від кутової швидкості ω коливань поверхні і може тривати досить довго, а потім переходити до замкнутої траєкторії.

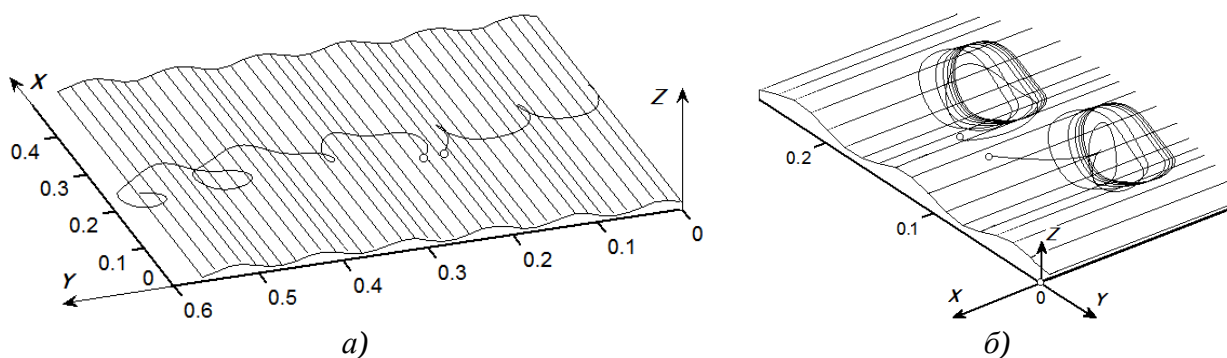


Рис. 9. Траєкторії ковзання частинки по хвилястій поверхні при $c=0,005$, $a=62,8$, $\omega=10 \text{ c}^{-1}$, $f=0,3$: а) $2r=T$ ($T=0,1$, $r=0,05 \text{ м}$); б) $2r < T$ ($T=0,1$, $r=0,04 \text{ м}$)

Ковзання частинки по площині є частковим випадком ковзання по хвилястій поверхні, коли амплітуда синусоїди дорівнює нулю.

Цікавим є рух частинок по поверхні циліндра, оскільки при великому його радіусі обмежена ділянка його поверхні буде близькою до площини. Відповідно і траєкторії відносного руху частинки мають бути подібними. Перейдемо до дослідження закономірностей

руху частинок по зовнішній поверхні циліндра, який здійснює колові поступальні коливання в горизонтальних площинах, при різних кутах його нахилу.

Параметричні рівняння верхньої половини циліндра (рис. 10) з нахилом під кутом β його осі до горизонтальної площини мають вигляд:

$$\begin{aligned} X &= u \cos \beta + r_0 \sin \beta \sin \alpha; \\ Y &= r_0 \cos \alpha; \\ Z &= u \sin \beta - r_0 \cos \beta \sin \alpha, \end{aligned} \quad (17)$$

де r_0 – радіус циліндра, м; α , u – незалежні змінні поверхні: α – кут повороту точки циліндра навколо його осі; u – довжина прямолінійної твірної циліндра.

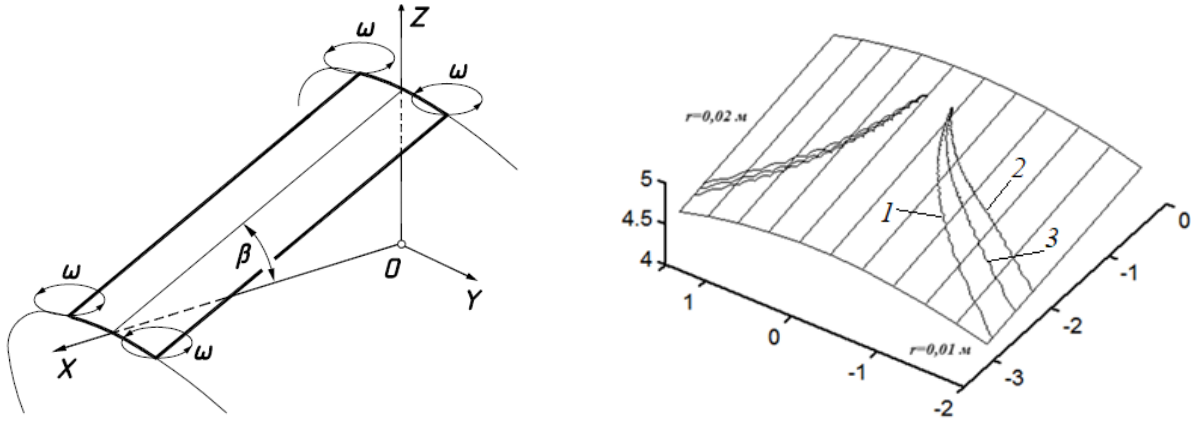


Рис. 10. Похилий циліндр та траєкторії ковзання частинок по його поверхні при коливальному русі ($r_0=5$ м; $\beta=10^\circ$; $\omega=20$ с $^{-1}$): 1 – $f=0,25$; 2 – $f=0,3$; 3 – $f=0,35$

Відносна швидкість ковзання частинки визначається за виразом:

$$V_r = \sqrt{u'^2 + r_0^2 \alpha'^2}. \quad (18)$$

Система диференціальних рівнянь руху частинки:

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \frac{1}{r_0} [-r\omega^2 \sin \alpha \sin \omega t + (r\omega^2 \sin \beta \cos \omega t + g \cos \beta) \cos \alpha] + \\ &\quad + \frac{A f \alpha'}{\sqrt{u'^2 + r_0^2 \alpha'^2}}; \\ u'' &= r\omega^2 \cos \beta \cos \omega t - g \sin \beta + \frac{A f u'}{\sqrt{u'^2 + r_0^2 \alpha'^2}}; \\ R &= -m A, \end{aligned} \quad (19)$$

де $A = r_0 \alpha'^2 + g \cos \beta \sin \alpha + r\omega^2 (\cos \alpha \sin \omega t + \sin \beta \sin \alpha \cos \omega t)$.

Розглянуто окремі випадки розташування циліндра за наявності чи відсутності його коливального руху. Встановлено, що при коливальному русі горизонтального циліндра частинка теж здійснює коливальний рух, пересуваючись по його зовнішній поверхні у поперечному напрямі щодо прямолінійних твірних циліндра. При нахилі циліндра навіть на незначний кут траєкторія переміщення частинок суттєво змінюється, відхиляючись від поперечного напрямку в сторону нахилу циліндра. Частинки з різним коефіцієнтом тертя рухаються по різних траєкторіях, причому відстань між ними збільшується по мірі ковзання по поверхні (рис. 10). Отриманий результат може бути використано для сепарації матеріалу за його фрикційними властивостями.

У роботі розглянуто також ковзання частинки по горизонтальній площині, яка здійснює складні коливання: переміщення точки площини по колу зі сталою кутовою швидкістю відносно його центра і одночасне обертання площини навколо цієї точки в протилежну сторону з тією ж кутовою швидкістю. Це є частковим випадком руху горизонтальної площини, коли одна фіксована точка цієї площини описує коло в горизонтальній площині, а друга здійснює зворотно-поступальний рух в цій же площині. Такий рух площини

є аналогом руху шатуна кривошипно-повзунного механізму. На відміну від попередніх випадків поступальних коливань поверхні в даному випадку присутній поворот площини і, відповідно, виникає додаткове коріолісове прискорення.

Теорія руху частинок по поверхнях обертання, які здійснюють обертальний рух, використовуються для проєктування різноманітних пристроїв. Часто у ролі робочої поверхні машин і обладнання використовується поверхня циліндра, який обертається навколо власної осі. Спочатку розглянемо рух частинки по поверхні горизонтального циліндра (рис. 11). На початку руху частинка знаходиться в точці A на нижній твірній циліндра. Відносна швидкість ковзання частинки визначається за виразом (18). Система диференціальних рівнянь руху частинки в такому випадку має вигляд:

$$\alpha'' = \frac{g}{r_0} [\sin(\omega t - \alpha) - f \cos(\omega t - \alpha)] - f(\omega - \alpha')^2; \quad (20)$$

$$R = m[r_0(\omega - \alpha')^2 + g \cos(\omega t - \alpha)], \quad (21)$$

де $r_0 = \text{const}$ – радіус циліндра, м; α і u – кутова і лінійна (довжина прямолінійної твірної циліндра) координати поверхні відповідно (незалежні змінні). Будемо вважати, що початкова швидкість в поздовжньому напрямі $u'=0$, отже $u=\text{const}$, тобто частинка ковзає перпендикулярно до твірних.

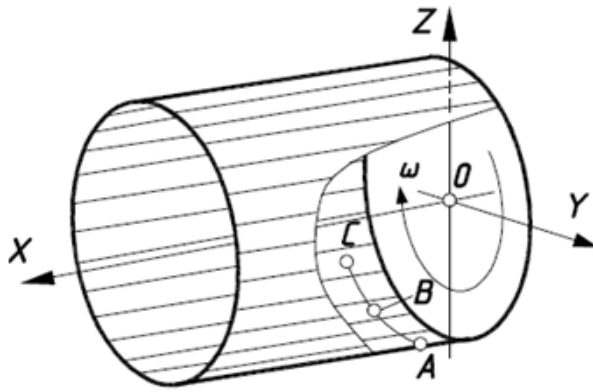


Рис. 11. Аксонометричне зображення горизонтального циліндра, який обертається навколо власної осі

При попаданні частинки на поверхню вона починає здійснювати коливальний рух із певною амплітудою у кутовому вимірі, величина якої залежить від точки попадання частинки, коефіцієнта тертя та початкової абсолютної швидкості. За належних вихідних умов ($\alpha'=\omega$, $\alpha=\alpha_0=-\arctg f$), які визначаються аналітично, частинка в абсолютному русі залишається нерухомою, знаходячись в точці циліндра на певній відстані від нижньої твірної, що в кутовому вимірі відповідає куту тертя.

Отримані результати розширено на випадки нахилу циліндра під різними кутами β до горизонтальної площини проєкцій. Система диференціальних рівнянь (20) – (21) у такому випадку набуває вигляду:

$$\begin{aligned} \alpha'' &= \frac{g}{r_0} \cos \beta \sin(\omega t - \alpha) - \\ &- \frac{f \alpha'}{\sqrt{u'^2 + r_0^2 \alpha'^2}} [g \cos \beta \cos(\omega t - \alpha) + r_0(\omega - \alpha')^2]; \\ u'' &= g \sin \beta - \frac{f u'}{\sqrt{u'^2 + r_0^2 \alpha'^2}} [g \cos \beta \cos(\omega t - \alpha) + r_0(\omega - \alpha')^2]; \\ R &= m[g \cos \beta \cos(\omega t - \alpha) + r_0(\omega - \alpha')^2]. \end{aligned} \quad (22)$$

Кінематичні характеристики руху частинки залежать від кута нахилу циліндра і кутової швидкості його обертання:

- при $\beta < \arctg f$ відбувається стабілізація руху, коливання припиняються і частинка рухається прямолінійно в осьовому напрямі зі сталою швидкістю;
- при $\beta \geq \arctg f$ стабілізації руху не відбувається, частинка рухається прискорено в осьовому напрямі;
- при досягненні певної величини кутової швидкості частинка практично «залипає» незалежно від кута нахилу циліндра.

Розглянуто ковзання частинки по зовнішній поверхні вертикального конуса, який обертається навколо власної осі (рис. 12). За такою схемою у деяких висівних апаратах відбувається попадання зерна на конус з подальшим його ковзанням і розподіленням по поверхні. Складено і розв'язано систему диференціальних рівнянь. Встановлено, що для початку ковзання частинки важливе значення має кут β нахилу прямолінійних твірних конуса:

- при $\beta > \arctg f$ частинка почне ковзати по поверхні конуса, навіть при відсутності його обертання;
- при $\beta < \arctg f$ ковзання частинки є можливим при достатній величині кутової швидкості ω обертання конуса;
- при $\beta = \arctg f$ ковзання частинки починається при будь-якій кутовій швидкості обертання конуса.

Отримана формула для знаходження граничного значення кутової швидкості обертання конуса при $\beta < \arctg f$, в тому числі і $\beta = 0$, за якої можливе ковзання частинки:

$$\omega > \sqrt{\frac{g(f - \tg\beta)}{u_0(\cos\beta + f \sin\beta)}}. \quad (23)$$

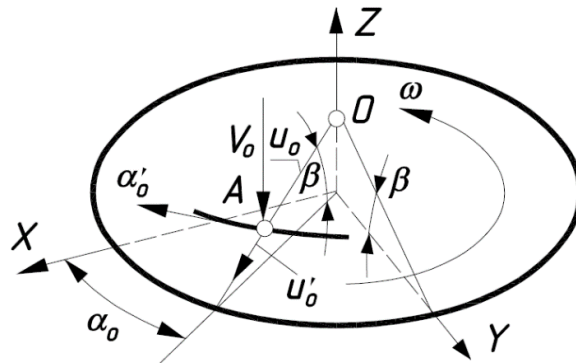


Рис. 12. Положення частинки в точці А на поверхні конуса

Досліджуючи пристрої відцентрової дії, доцільно розглянути висівні апарати сферичної форми. Аналітичні залежності руху частинки по внутрішній поверхні сферичного сегмента, який обертається навколо вертикальної осі (рис. 13), мають вигляд:

$$\begin{aligned} \varepsilon'' &= \left[(\omega + \alpha')^2 \cos\varepsilon - \frac{g}{r_0} \right] \sin\varepsilon - f \frac{\varepsilon' B}{r_0 A}; \\ \alpha'' &= -2\varepsilon'(\omega + \alpha') \operatorname{ctg}\varepsilon - f \frac{\alpha' B}{r_0 A}; \end{aligned} \quad (24)$$

$$R = mB,$$

де r_0 – радіус сфери, м; ε, α – незалежні змінні поверхні, якими є кути, що задають положення точки на ній в напрямі меридіана і паралелі відповідно; $A = \sqrt{\varepsilon'^2 + \alpha'^2 \sin^2 \varepsilon}$, $B = g \cos\varepsilon + r_0[\varepsilon'^2 + (\omega + \alpha')^2 \sin^2 \varepsilon]$.

При розгоні частинки по поверхні сегмента згодом відбувається її гальмування і «залипання» на меридіані, близькому до екватора сфери. Якщо частинка починає свій рух не з нижнього полюса сферичного сегмента, а дещо вище (наприклад, після розгону по плоскому диску радіуса r – рис. 13), то вона швидше досягає верхньої граничної траєкторії, виходячи за межі півсфери.

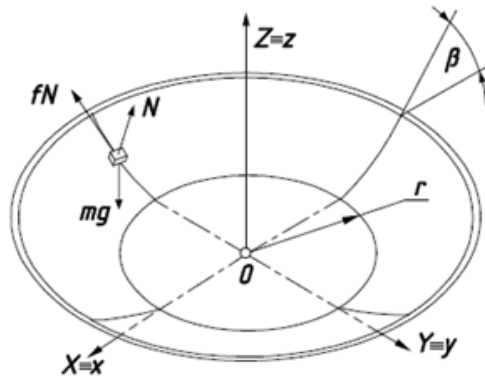


Рис. 13. Частинка на сферичному сегменті із плоским дном

Окрім циліндричних, конічних, сферичних форм обертових робочих органів з практичної і пізнавальної точки зору важливим є дослідження руху частинки по поверхні обертання із довільним наперед заданим меридіаном. Практичним прикладом для висвітлення пропонованої методики є соковитискачі відцентрового типу, у яких подрібнений матеріал потрапляє на поверхню сита у вигляді конуса знизу з горизонтальної терки, яка теж обертається. Сито може бути як циліндричним, так і конічним. Завдяки конічному ситу мезга може рухатися по його поверхні вгору для подальшого очищення сита, що неможливо у циліндричних ситах. Однак у циліндричних ситах ступінь забору соку вищий. Було розглянуто поверхню сита зі змінним кутом β , який по мірі підйому частинок мезги зростає. Це дасть можливість поєднати переваги обох сит та уникнути явища «залипання». Якщо в таких апаратах гальмування швидкості ковзання частинки після розгону по поверхні сприяє кращому виділенню соку, то в апаратах для розкидання мінеральних добрив потрібно максимально розігнати частинку. Для цього розсіювальні апарати додатково укомплектовують вертикальними лопатками, вздовж яких частинка змушена рухатися в радіальному напрямі. У цьому випадку частинка перебуває в контакті із двома поверхнями одночасно (рис. 14), отже є два коефіцієнти тертя: f_s – по поверхні сегмента і f_p – по лопатці. Відповідно діють дві сили тертя в протилежному напрямі ковзання частинки: $F_s = f_s R_s$ і $F_p = f_p R_p$.

Складено три рівняння з трьома невідомими залежностями: $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$, $R_s = R_s(\alpha)$ і $R_p = R_p(\alpha)$:

$$\varepsilon'' = \left(\omega^2 \sin \varepsilon - 2\varepsilon' \omega f_p - \frac{g}{r_0} f_s \right) \cos \varepsilon - \left(\frac{g}{r_0} + f_s \omega^2 \sin \varepsilon \right) \sin \varepsilon - \varepsilon'^2 f_s; \quad (25)$$

$$R_s = m(r_0 \varepsilon'^2 + g \cos \varepsilon + r_0 \omega^2 \sin^2 \varepsilon); \quad (26)$$

$$R_p = 2mr_0 \omega \varepsilon' \cos \varepsilon, \quad (27)$$

де $r_0 = \frac{d}{2 \sin \beta}$ – радіус сфери, м; β – кут підйому частинки в момент її сходження з поверхні вздовж вертикальної лопатки; d – діаметр сегменту, м; α – незалежна змінна (кут повороту частинки вздовж паралелі). При $\varepsilon = \beta$ частинка сходять із диска.

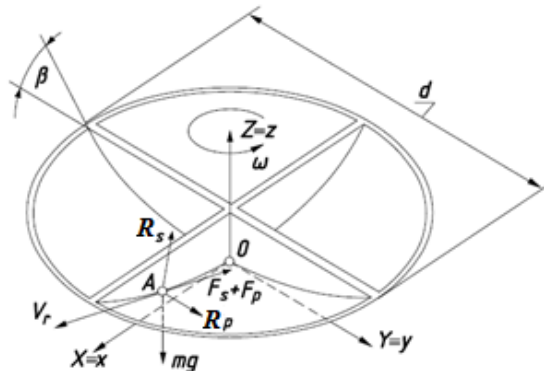


Рис. 14. Схема дії прикладених до частинки сил

Диференціальне рівняння (25) є незалежним і в результаті його інтегрування знаходять залежність кута повороту $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$ частинки вздовж меридіана. Після її підстановки в рівняння (26) стає відомою реакція R_s поверхні сегмента, а при підстановці в (27) – реакція лопатки R_p . На рис. 15 побудовано графіки зміни відносної і абсолютної швидкостей до моменту сходу із апарата. З метою збільшення швидкості розгону матеріалу вздовж лопаток при однакових інших умовах (діаметру диска, кутовій швидкості його обертання, куті сходу частинок із диска щодо поверхні поля) досліджено випадки сферичної форми розсіювального апарата з вертикальними лопатками різної форми. У результаті цього отримано три патенти України на корисну модель.

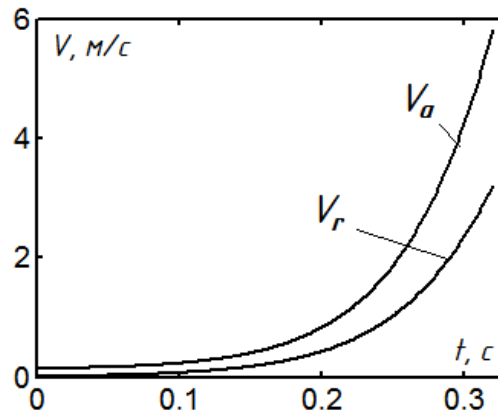


Рис. 15. Графік зміни відносної V_r і абсолютної V_a швидкостей

Ще один приклад двох жорстко скріплених між собою поверхонь – циліндр зі смугою гвинтового коноїда, яка відіграє роль лопатки (рис. 16). Якщо поверхні нерухомі, то їх можна використовувати в ролі гвинтового спуску, однак в даному випадку частинка ковзає одночасно по двох поверхнях на відміну від випадків, розглянутих у першому розділі. Для загального випадку, коли поверхні обертаються з кутовою швидкістю ω , було складено систему із трьох рівнянь, одне з яких є диференціальним рівнянням другого порядку і, як і в попередньому випадку, є незалежним:

$$\alpha'' = \frac{g \cos \beta}{r_0} (\sin \beta - f_p \cos \beta) - f_s (\omega - \alpha')^2 \cos \beta, \quad (28)$$

де $r_0 = \text{const}$ – радіус обмежуючого циліндра, м; $\beta = \text{const}$ – кут підйому гвинтової лінії; α – кут повороту частинки вздовж гвинтової лінії навколо її осі (незалежна змінна).

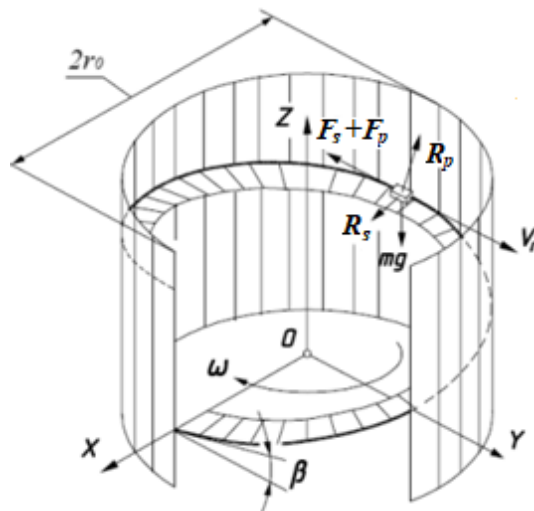


Рис. 16. Схема дії сил на частинку, яка ковзає вздовж спільної гвинтової лінії жорстко скріплених поверхонь

Якісний аналіз диференціального рівняння (28) дозволив з'ясувати, за яких умов можливе ковзання частинки як по нерухомій, так і по рухомій комбінованій поверхні. Для нерухомої поверхні після стабілізації руху кутова швидкість ковзання частинки при її опусканні буде сталою: $\alpha' = \omega_0 = \text{const}$. За таких умов $\alpha'' = 0$ і $\omega = 0$. У цьому випадку із (28) отримуємо:

$$\omega_0 = \alpha' = \sqrt{\frac{g}{r_0 f_s} (\sin \beta - f_p \cos \beta)}. \quad (29)$$

Якщо кут β буде рівний кутові тертя частинки по поверхні шнека, тобто $f_p = \text{tg} \beta$, то $\omega_0 = 0$ і опускання частинки не відбудеться. При $\beta > \text{arctg} f_p$ частинка буде опускатися, обертаючись зі сталою кутовою швидкістю ω_0 (29). Якщо із цією ж кутовою швидкістю обертати поверхні в протилежному напрямі, то частинка «зависає», тобто вона ковзає по обох поверхнях, а в абсолютному русі залишається нерухомою. Для підйому частинки кутова швидкість обертання поверхонь повинна бути більшою від швидкості (29).

Комбінація цих же поверхонь, коли обмежуючий циліндр є нерухомим, а коноїд обертається в ньому із кутовою швидкістю ω , є широко поширеним пристроєм під назвою шнекового або гвинтового конвеєра. Відповідно і праця із дослідження транспортування ним сипкого матеріалу є багато, однак вони носять експериментальний характер. Це зумовлено складністю аналітичного опису поведінки суцільного сипкого середовища. Стосовно транспортування окремої частинки розглядаються часткові положення конвеєра із вертикальною або горизонтальною осями. Характер переміщення частинки для різних положень осі є принципово різним. Для транспортування частинки у вертикальному напрямі потрібно забезпечити достатню кутову швидкість обертання шнека. При горизонтальному транспортуванні переміщення частинки відбувається при будь-якій кутовій швидкості обертання шнека. Отже, при зміні нахилу осі шнека настає момент, коли транспортування стає можливим, тоді як воно було неможливим у вертикальному напрямі.

Для дослідження процесу транспортування частинки при заданому кутові φ нахилу осі конвеєра в межах $0 \dots \pi/2$ (рис. 17) було складено узагальнену систему диференціальних рівнянь, у якій позначення коефіцієнтів тертя f_s – по поверхні циліндра і f_p – по поверхні коноїда, відповідних реакцій R_s і R_p , а також кута β підйому спільної гвинтової лінії, вздовж якої ковзає частинка, радіуса циліндра r_0 аналогічні попередній задачі:

$$\alpha'' = \frac{g \cos \beta}{r_0} [(\cos \beta - f_p \sin \beta) \sin \varphi \sin(\omega t - \alpha) - (f_p \cos \beta + \sin \beta) \cos \varphi] + \frac{f_s \cos \beta (\omega - 2\alpha' + \omega \cos 2\beta - f_p \omega \sin 2\beta)}{2r_0 \sqrt{\omega(\omega - 2\alpha') \cos^2 \beta + \alpha'^2}} \times \quad (30)$$

$$\times [r_0(\omega - \alpha')^2 + g \sin \varphi \cos(\omega t - \alpha)];$$

$$R_p = mg[\cos \beta \cos \varphi + \sin \beta \sin \varphi \sin(\omega t - \alpha)] + \frac{mf_s \omega \sin \beta \cos \beta}{r_0 \sqrt{\omega(\omega - 2\alpha') \cos^2 \beta + \alpha'^2}} [r_0(\omega - \alpha')^2 + g \sin \varphi \cos(\omega t - \alpha)]; \quad (31)$$

$$R_s = mr_0(\omega - \alpha')^2 + mg \sin \varphi \cos(\omega t - \alpha). \quad (32)$$

При $\varphi = 0$ рівняння (30) описує рух частинки у вертикальному конвеєрі. Підйом частинки можливий при куті підйому гвинтової лінії, меншому кута тертя по поверхні шнека, але при цьому існує максимальне його значення, коли підйом неможливий ні при яких кутових швидкостях його обертання. Граничне значення кутової швидкості обертання шнека, при якому підйом частинки змінюється на її спуск, знайдено аналітично:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{r_0 f_s} \cdot \frac{f_p \cos \beta + \sin \beta}{\cos \beta - f_p \sin \beta}}. \quad (33)$$

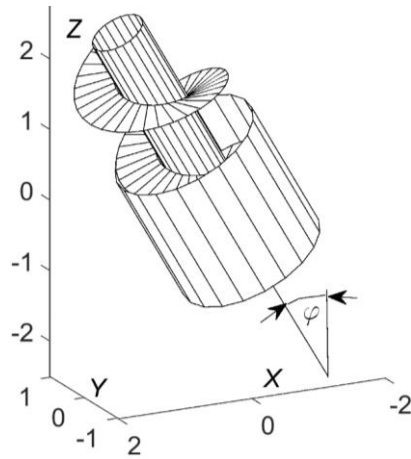


Рис. 17. Схема розташування шнекового конвеєра із похилою віссю

Вираз (33) відрізняється від аналогічного виразу (29) для жорстко скріплених поверхонь. При $\omega > \omega_0$ (33) відбувається підйом частинки, причому після стабілізації руху відносно і абсолютною траєкторіями є гвинтові лінії (рис. 18), а кутова і лінійна швидкості є сталими.

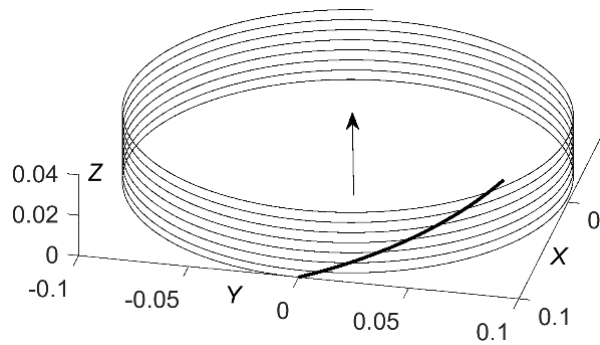


Рис. 18. Відносна (потовщена лінія) і абсолютна (тонка лінія) траєкторії підйому частинки

При горизонтальному розташуванні осі конвеєра ($\varphi = 90^\circ$) після стабілізації руху відносною траєкторією є гвинтова лінія, а абсолютною – прямолінійна твірна циліндра. На рис. 19 показано траєкторії під час стабілізації руху.

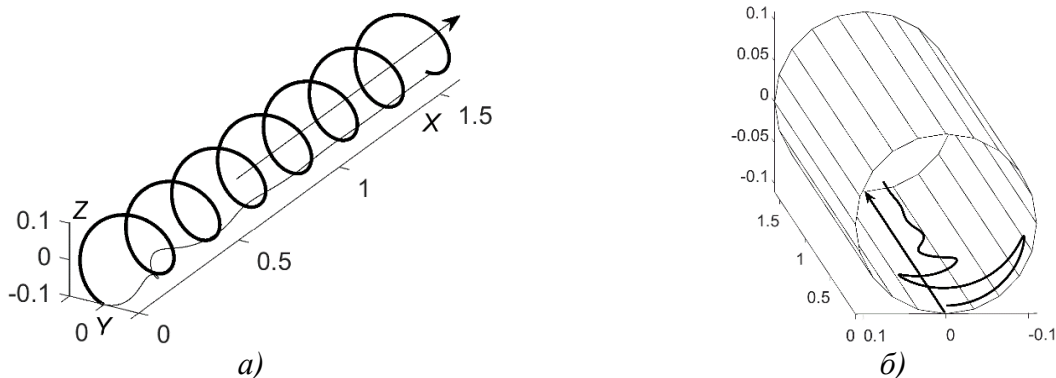


Рис. 19. Траєкторії руху частинки в перехідний період: а) відносна (потовщена лінія) і абсолютна (тонка лінія) траєкторії; б) відносна траєкторія на поверхні циліндричного кожуха

На рис. 19, б стрілкою показано напрям переміщення частинки, причому стрілка збігається із нижньою твірною циліндра. Видно, що абсолютна траєкторія з часом

наближається до прямої лінії, яка відхилена від нижньої твірної на певний кут відносно осі обертання.

Якщо порівняти переміщення окремої частинки вертикальним і горизонтальним шнеками, то між цими процесами існує суттєва різниця. По-перше, для переміщення частинки вгору вертикальним шнеком має бути забезпечена належна кутова швидкість його обертання, тоді як для горизонтального шнека така вимога відсутня. По-друге, абсолютною траєкторією переміщення частинки вертикальним шнеком є гвинтова лінія, тоді як для горизонтального шнека – пряма. Очевидно, що ці відмінні між собою процеси повинні якось переходити один в одного по мірі зміни кута нахилу φ від 0° (вертикальний шнек) до 90° (горизонтальний шнек).

У процесі теоретичних досліджень було з'ясовано, що при похилій осі конвеєра після стабілізації руху кутова швидкість ковзання частинки змінює свій напрям, тобто коливається на поверхні шнека в протилежні сторони. При русі частинки вниз ці коливання відбуваються так, що переважає від'ємна частина, а при русі частинки вгору – навпаки. Очевидно, що існує такий кут нахилу φ , при якому частинка не рухається в жодну із сторін в напрямі осі. Знайти його аналітичним способом не вдається саме із-за цих коливань. Його було знайдено завдяки візуалізації траєкторій підбором відповідного значення φ при заданих конструктивних параметрах конвеєра і кутовій швидкості обертання шнека. Тоді абсолютною траєкторією практично є коло на поверхні кожуха, а відносною – малий відрізок гвинтової лінії, на якому частинка здійснює однакові коливання в протилежні сторони (рис. 20, а). На рис. 20, б показано графік коливань кутової швидкості ковзання, з якого видно, що додатна і від'ємна частини є рівними.

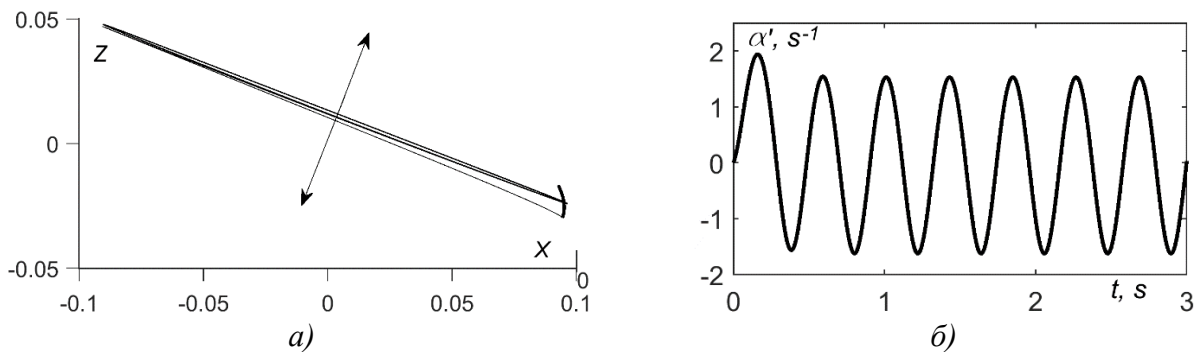


Рис. 20. Графічні ілюстрації до випадку, коли частинка не рухається вздовж осі і здійснює невеликі коливання при $\beta=20^\circ$, $f_p=f_s=0,3$, $r_o=0,1$ м, $\omega=15$ c^{-1} і куті нахилу конвеєра $\varphi=19,5^\circ$: а) абсолютна і відносна траєкторії; б) графік зміни кутової швидкості ковзання частинки

Таким же чином, завдяки візуалізації траєкторій, можна знайти значення кута φ , при якому абсолютна траєкторія від гвинтової лінії переходить до прямої. Дослідження показали, що для вказаних параметрів конвеєра, коефіцієнтів тертя і кутової швидкості обертання шнека це відбувається при $\varphi=57,5^\circ$. При цьому відбувається не лише якісна зміна форми абсолютної траєкторії, але і швидкості транспортування: при переході абсолютної траєкторії від гвинтової лінії до прямої відстань підйому частинки за однаковий проміжок часу зросла більше, ніж вдвічі.

Слід зазначити, що на процес переміщення частинки суттєво впливають коефіцієнти тертя. Зокрема, зменшення коефіцієнта тертя f_p по поверхні шнека і збільшення коефіцієнта тертя f_s по поверхні кожуха позитивно впливають на її транспортування вгору. Натомість, при $f_s=0$, тобто при абсолютно гладенькій поверхні кожуха, транспортування частинки вгору стає взагалі неможливим при будь-яких значеннях кута φ , окрім кута $\varphi=90^\circ$, коли транспортування відбувається в горизонтальному напрямі.

Четвертий розділ присвячено аналітичному опису руху частинки по стаціонарних поверхнях у функції довжини пройденого шляху. Окрім параметричних рівнянь у функції

часу для дослідження руху частинок по стаціонарних поверхнях можуть бути застосовані параметричні рівняння у функції натурального параметру – довжини дуги s траєкторії, а також тригранник Френе. Від поточного значення незалежної змінної s залежить положення вершини тригранника в точці траєкторії руху частинки. Орієнтація ортів тригранника визначається диференціальними характеристиками траєкторії і діючи на частинку сили в його системі мають строго визначений напрям (окрім сили ваги, яка завжди спрямована вниз). У певних випадках це спрощує складання диференціальних рівнянь руху, яке здійснюється в проекціях на орти рухомого тригранника Френе.

У другому розділі було розглянуто гравітаційні спуски з використанням гвинтових поверхонь із заданою кривою осевого перерізу. Якщо таким перерізом є прямолінійна твірна, що перетинає вертикальну вісь поверхні під прямим кутом, то поверхнею є гвинтовий коноїд. Було показано, що при ковзанні по поверхні частинка віддаляється від її осі і зупиняється. У такому випадку поверхню коноїда потрібно обмежити співвісною циліндричною. Такий варіант розглядався у третьому розділі (рис. 16), коли комбінація вказаних поверхонь була жорстко скріплена між собою і оберталася навколо власної осі. У частковому випадку, коли $\omega=0$, тобто коли поверхні нерухомі, було знайдено залежність (29), при якій можливе опускання частинки і за якою можна визначити кутову її швидкість обертання α' при опусканні. Точно таку залежність було отримано із використанням у ролі незалежної змінної довжини дуги траєкторії s . При гравітаційному транспортуванні матеріалу є обмеження на швидкість його руху. У зв'язку із цим було також виведено формулу для її розрахунку:

$$V = \frac{r_0}{\cos \beta} \sqrt{\frac{g}{r_0 f_s} (\sin \beta - f_p \cos \beta)}. \quad (34)$$

За формулою (34) при відомих коефіцієнтах тертя f_s і f_p можна підібрати конструктивні параметри r_0 і β поверхні для забезпечення потрібної швидкості транспортування.

Доцільність супровідного тригранника Френе траєкторії руху частинки можна показати на прикладі проєктування криволінійної осі силосопроводу для транспортування подрібненої маси. Не дивлячись на його просту конструкцію, він повинен бути спроектований таким чином, щоб не відбувалося надмірного гальмування подрібненої маси або її «залипання» на поверхні силосопроводу. Кінетичної енергії, яку частинка отримує від подрібнювального барабана, потрібно вистачити, щоб подолати шлях у силосопроводі і мати певну швидкість на виході з нього.

На рис. 21, а наведено приклад транспортування подрібненої маси, а на рис. 21, б – частинку на осі силосопроводу з деякими прикладеними до неї силами. Сила реакції R і відцентрова сила спрямовані вздовж орта $\vec{n}$ у протилежні сторони, сила тертя – у протилежну сторону напрямку орта $\vec{t}$, сила ваги $m \cdot g$ розкладається на орти тригранника через кут α .



Рис. 21. Графічні ілюстрації до руху частинки по кривій лінії – осі силосопроводу: а) транспортування подрібненої маси у транспортний засіб; б) схема руху окремої частинки і прикладені до неї сили

У результаті проєкціювання вказаних сил на орти тригранника отримано систему диференціальних рівнянь руху частинки:

$$V \frac{dV}{ds} = -g \sin \alpha - f \left(V^2 \frac{d\alpha}{ds} + g \cos \alpha \right); \quad (35)$$

$$R = mV^2 \alpha' + mg \cos \alpha. \quad (36)$$

Диференціальне рівняння (35) не залежить від (36). Для його розв'язання потрібно задати одну із залежностей: форму кривої $\alpha=\alpha(s)$ або ж закономірність зміни швидкості $V=V(s)$. У нашому випадку потрібно знаходити таку закономірність $\alpha=\alpha(s)$, яка б забезпечила транспортування частинки без відриву від поверхні силосопроводу при наданій початковій швидкості при виході із подрібнювального барабана. Після знаходження залежності $\alpha=\alpha(s)$ стає відомою сила реакції R поверхні (36), від якої залежить сила тертя частинки по циліндричній поверхні силосопроводу.

Отримані залежності було застосовано до двох кривих: дуги кола і сконструйованої кривої. Для обох кривих (дуга AB на рис. 21, б) дотична змінювала свій напрям від вертикального до горизонтального, тобто кут α змінювався в межах 90° . У точці вступу маси у силосопровід його вісь повинна мати мінімальну кривину або ж вона повинна бути рівною нулеві і наростати плавно, оскільки від цього залежить величина відцентрової сили і, відповідно, сили тертя. Нехай кривина набуватиме мінімального значення $k_{\min}$ на початку (при $\alpha=\pi/2$) і в кінці силосопроводу (при $\alpha=\pi$) і максимального значення $k_{\max}$ в середній точці силосопроводу (при $\alpha=3\pi/4$). Склавши систему трьох рівнянь для значень кривини у трьох точках осі, знаходимо залежність $k=k(\alpha)$:

$$k = a + b\alpha + c\alpha^2, \quad (37)$$

$$\text{де } \alpha = 9k_{\min} - 8k_{\max}; \quad b = \frac{24(k_{\max}-k_{\min})}{\pi}; \quad c = -\frac{16(k_{\max}-k_{\min})}{\pi^2}.$$

Від залежності $k=k(\alpha)$ (37) потрібно перейти до залежності $\alpha=\alpha(s)$. Із визначення кривини $k=d\alpha/ds$ можна записати: $ds=d\alpha/k$. Таким чином, вираз довжини дуги $s=s(\alpha)$ можна знайти наступним інтегруванням:

$$s = \int \frac{d\alpha}{a + b\alpha + c\alpha^2} = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \operatorname{Arctg} \frac{2c\alpha + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \quad (38)$$

Із залежності (38) $s=s(\alpha)$ можна знайти обернену залежність $\alpha=\alpha(s)$, після підстановки в яку сталих a, b, c остаточно отримаємо:

$$\alpha = \frac{\pi}{4} \left(3 + \frac{k_{\max}}{d} \operatorname{Tanh} \frac{4d}{\pi} s \right), \quad (39)$$

$$\text{де стала } d = \sqrt{k_{\max}(k_{\max} - k_{\min})}.$$

Вісь силосопроводу знаходимо чисельним інтегруванням відомих рівнянь:

$$x = \int \cos \alpha(s) ds; \quad y = \int \sin \alpha(s) ds. \quad (40)$$

До виразу (36) для визначення реакції R входить похідна α' , тобто кривина осі силосопроводу. Її знаходимо диференціюванням виразу (39):

$$\frac{d\alpha}{ds} = k = k_{\max} \operatorname{Sech}^2 \left(\frac{4d}{\pi} s \right). \quad (41)$$

На рис. 22, а побудовано дві осі однакової довжини ($s=6,3$ м): одна вісь є дугою кола радіуса $r=4$ м ($k=0,25=\text{const}$) і позначена цифрою 1, друга побудована за рівняннями (39), (40) при $k_{\min}=0,1$, $k_{\max}=0,4$ і позначена цифрою 2. На рис 22, б аналогічними цифрами позначені графіки зміни сили реакції R .

Для обох кривих початкова швидкість $V_0=40$ м/с. Графіки зміни сили реакції, тобто тиску поверхні на частинку (рис. 22, б) відрізняються кардинально. Якщо для кола тиск на початку руху максимальний і поступово зменшується, то для сконструйованої осі він поступово зростає, а потім зменшується. Це запобігає залипанню маси на початку руху. Крім того, проєктування осі силосопроводу керуванням її кривини дає можливість отримувати різні форми кривих.

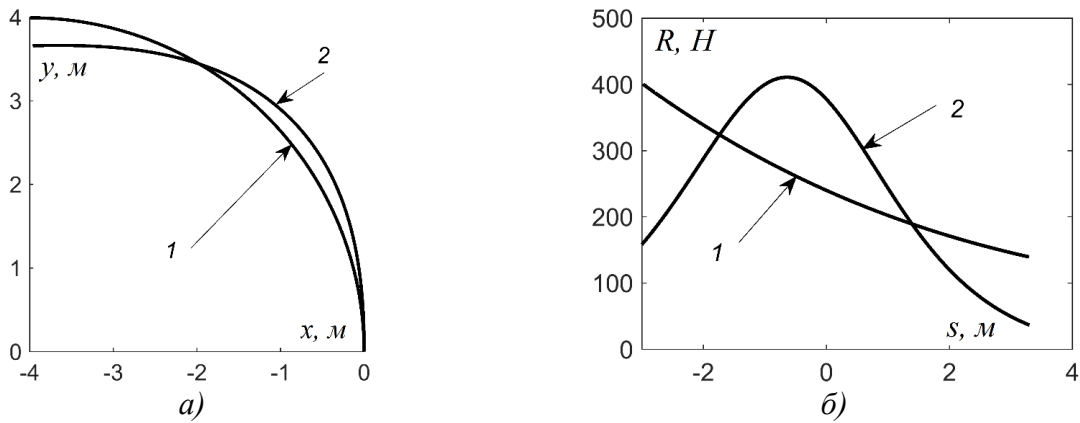


Рис. 22. Графічні ілюстрації до проєктування осі силосопроводу: а) дуга кола – 1 і сконструйована крива – 2; б) відповідні сили реакції

Частинки матеріалу можуть утворювати суцільне середовище, одним із варіантів якого може бути гнучка смуга. При русі по поверхні вона деформується, набуваючи її форми. Узагальненням розгляду руху окремої частинки є дослідження нестискуваної смуги як сукупності окремих пов'язаних частинок.

Нехай абсолютно гнучка смуга прямокутного перерізу з розмірами a і b розташована на внутрішній поверхні горизонтального циліндра (рис. 23, а).

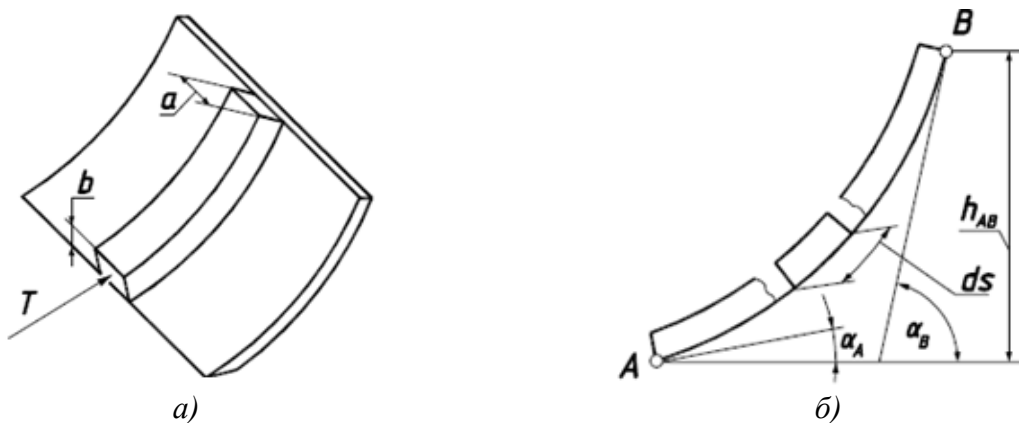


Рис. 23. До розгляду руху гнучкої смуги по циліндричній поверхні: а) форма смуги і її положення на поверхні; б) виділення елемента смуги довжиною ds

Щоб її перемістити вгору з постійною швидкістю V , необхідно докласти певних зусиль T . Подібна ситуація може виникнути при роботі бульдозера, якщо прийняти шар матеріалу, що рухається по робочій поверхні, за гнучку смугу. У такому випадку скибу ґрунту можна прийняти за смугу прямолінійного перерізу, довжина якої у процесі деформації не змінюється, тобто вона є нестискуваною. Роль зусилля T у цьому випадку відіграють сили підпору, під дією яких смуга змушена рухатися вгору.

Для визначення величини зусилля для штовхання смуги вгору розглянемо її елемент довжиною ds (рис. 23, б). Можна уявити, що смуга складається з елементарних шматочків, кожен з яких нахилений під певним кутом α до горизонтальної площини. Тоді зусилля T буде сумою зусиль кожного елемента смуги – задача зводиться до інтегрування елементарних зусиль по довжині дуги s між точками A і B . Зусилля T визначатимемо саме для цієї ділянки без урахування смуги і діючих на неї сил поза точками A і B .

Проекціювання сил, що діють на елемент смуги довжиною ds , відбувається на орти тригранника, орт $\bar{t}$ якого є дотичним до кривої поперечного перерізу циліндра і спрямований у бік руху смуги, а другий орт нормалі $\bar{n}$ спрямований в бік кривини кривої. Третій орт бінормалі $\bar{b}$ у такому випадку проєкціюється в точку і для вирішення задачі ролі не грає.

На елемент смуги діють елементарні сили: сила ваги, відцентрова сила, стискаюча сила. Дві останні сили діють в напрямі орта нормалі в протилежну сторону. До них додається складова сили ваги, що зумовлює елементарний тиск на поверхню. У результаті виникає елементарна сила тертя, яка викликає додаткове стискаюче зусилля і, як наслідок, додаткову силу тертя. Повний приріст зусилля, яке пересуває елемент смуги і спрямоване в протилежну сторону орта дотичної, має вигляд:

$$\frac{dT}{ds} = abqg \sin \alpha + f(abqg \cos \alpha + abqkV^2 + Fk + Tk), \quad (42)$$

де a, b – габарити смуги, м; q – щільність матеріалу смуги, кг/м³; T – зусилля штовхання; F – стискаюче зусилля; V – швидкість руху смуги, м/с; f – коефіцієнт тертя.

При $k=0$ ($\alpha=const$) диференціальне рівняння (42) спрощується і описує рух смуги по похилій площині. Зусилля штовхання не залежить від її швидкості руху, а також зникає сила тертя від стискання смуги.

Для колового циліндра ($k=const$, $\alpha=ks$) диференціальне рівняння (42) після його інтегрування набуває вигляду:

$$T = Ce^{fks} - abq \left[\left(V^2 - \frac{g}{k} \cos \alpha_B \right) + \frac{g}{k(1+f^2)} ((1+2f^2) \cos ks - f \sin ks) \right], \quad (43)$$

де C – стала інтегрування, яка знаходиться за умови, що при $s=s_B$, тобто в точці B (рис. 23, б) сила T (43) дорівнює нулю.

Отримані формули дають можливість розрахувати необхідну потужність для забезпечення заданої швидкості пересування смуги. Для цього досить помножити зусилля T на швидкість V .

П'ятий розділ присвячено аналітичному опису руху частинки по рухомих поверхнях у функції довжини пройденого шляху. При знаходженні траєкторії руху частинки по рухомій поверхні вводиться рухома система координат, жорстко прив'язана до неї. При поступальних коливаннях введення рухомої системи координат не є доцільним, оскільки її осі залишаються паралельними до нерухомої системи координат, на відміну від обертового і комбінованого рухів. Рухомою системою координат може бути супровідний тригранник Френе переносної траєкторії, рух якого однозначно задається формою напрямної кривої. Рух тригранника, вершина якого рухається вздовж заданої траєкторії, розглядається як переносний, а рух точки в його системі – як відносний. У цьому полягає відмінність застосування тригранника Френе при русі частинки по нерухомій поверхні. Така схема дозволяє використовувати широко відомі у диференціальній геометрії формули Френе і отримати вектор абсолютного прискорення у проекціях на його орти. При цьому обов'язковою умовою є застосування в ролі незалежної змінної довжини дуги s траєкторії переносного руху.

Суть полягає в тому, що тригранник рухається із сталою швидкістю V_e вздовж траєкторії C_e переносного руху (рис. 24, а). Абсолютний рух частинки складається із двох рухів – переносного руху тригранника Френе і відносного руху частинки в системі тригранника. Положення частинки B у системі тригранника визначається радіус-вектором $\bar{\rho}$, який проєкціюється на його орти скалярними величинами $\rho_\tau, \rho_n, \rho_b$. Положення частинки у векторному вигляді (радіус-вектор $\bar{R}$) запишеться наступним чином:

$$\bar{R} = \bar{r} + \bar{\rho} \text{ або } \bar{R} = \bar{r} + \bar{\tau}\rho_\tau + \bar{n}\rho_n + \bar{b}\rho_b. \quad (44)$$

Диференціюванням виразу (44) при переході від часу t до змінної s знаходиться абсолютна швидкість V_a :

$$V_a = \frac{d\bar{R}}{dt} = \frac{d\bar{R}}{ds} \frac{ds}{dt} = V_e \frac{d\bar{R}}{ds}. \quad (45)$$

У свою чергу похідна виразу (44) по змінній s виконується диференціюванням добутоків змінних величин, залежних від s :

$$\frac{d\bar{R}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{ds} + \left(\frac{d\bar{\tau}}{ds} \rho_\tau + \bar{\tau} \frac{d\rho_\tau}{ds} \right) + \left(\frac{d\bar{n}}{ds} \rho_n + \bar{n} \frac{d\rho_n}{ds} \right) + \left(\frac{d\bar{b}}{ds} \rho_b + \bar{b} \frac{d\rho_b}{ds} \right). \quad (46)$$

Похідні $\frac{d\bar{r}}{ds}, \frac{d\bar{\tau}}{ds}, \frac{d\bar{n}}{ds}, \frac{d\bar{b}}{ds}$ згідно формул Френе розписуються в проекціях на орти тригранника через кривину k і скрут σ напрямної кривої:

$$\bar{r}' = \bar{\tau}; \bar{\tau}' = k\bar{n}; \bar{n}' = \sigma\bar{b} - k\bar{\tau}; \bar{b}' = \sigma\bar{n}. \quad (47)$$

У роботі розглянуто різні задачі на складний рух частинки із застосуванням тригранника Френе. Наприклад, переносною траєкторією руху є коло радіуса r , тобто кривина $k=1/r=\text{const}$. Частинка рухається в площині, яка проходить через орт $\bar{n}$ і складає із горизонтальною площиною кут β (рис. 24, б). Координати точки B у системі тригранника запишуться: $\rho_t(s)=-v\cdot\cos\beta$, $\rho_n(s)=-u$, $\rho_b(s)=v\cdot\sin\beta$, де $u=u(s)$ і $v=v(s)$ – залежності, що задають криву ковзання частинки по площині, і які потрібно знайти. Оскільки напрямна крива переносного руху плоска, то скрут σ в (47) дорівнює нулю. Після підстановки виразів (47) і похідних $\rho'_t=-v'\cos\beta$, $\rho'_n=-u'$, $\rho'_b=v'\sin\beta$ в (46) групуємо їх по ортах і після цього множимо на $V_e=r\cdot\omega$. Отриманий вираз є абсолютною швидкістю в проекціях на орти тригранника. Для отримання абсолютного прискорення диференціюємо вираз абсолютної швидкості знову із застосуванням формул Френе.

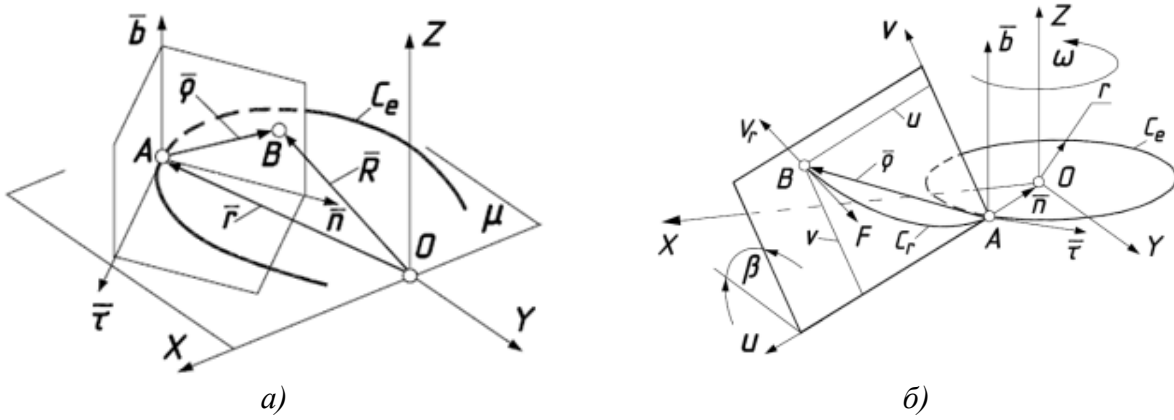


Рис. 24. Графічні ілюстрації до визначення абсолютної траєкторії частинки як переносного руху тригранника і відносного руху частинки в системі тригранника: а) загальний випадок напрямної кривої; б) напрямна крива – коло, частинка ковзає у площині, що проходить через орт $\bar{n}$

У кінцевому підсумку система диференціальних рівнянь ковзання частинки в проекціях на орти тригранника має наступний вигляд:

$$u'' = \frac{1}{r^2}(r + u - 2rv'\cos\beta) - \frac{fu'}{r\sqrt{u'^2 + v'^2}} \left[\frac{g}{r\omega^2}\cos\beta + \sin\beta \left(2u' + \frac{v}{r}\cos\beta \right) \right]; \quad (48)$$

$$v'' = \frac{\cos\beta}{r} \left(2u' + \frac{v}{r}\cos\beta \right) - \frac{g\sin\beta}{r^2\omega^2} - \frac{fv'}{r\sqrt{u'^2 + v'^2}} \left[\frac{g}{r\omega^2}\cos\beta + \sin\beta \left(2u' + \frac{v}{r}\cos\beta \right) \right]; \quad (49)$$

$$R = m \left[g\cos\beta + r\omega^2\sin\beta \left(2u' + \frac{v}{r}\cos\beta \right) \right]. \quad (50)$$

За допомогою системи диференціальних рівнянь (48) – (50) можна дослідити рух частинки при різних кутах β нахилу площини, починаючи від $\beta=0^\circ$ і до $\beta=90^\circ$. Якщо для горизонтальної площини ($\beta=0^\circ$) траєкторією ковзання частинки є спіралеподібна крива (рис. 25, а), то для вертикальної ($\beta=90^\circ$) вона вже не є спіраллю, а її ковзання зумовлене двома переміщеннями: від осі обертання і вниз (рис. 25, б). У роботі досліджено трансформування траєкторії ковзання частинки при зміні кута нахилу площини від 0° до 90° .

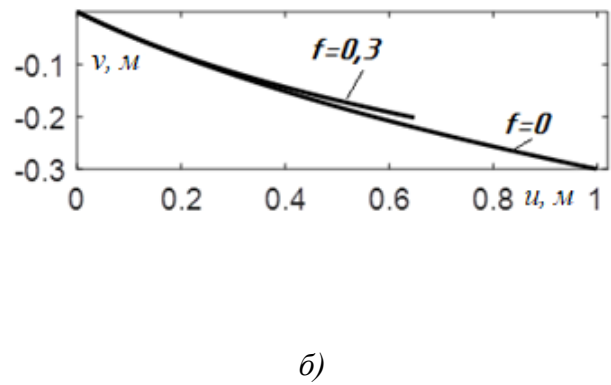
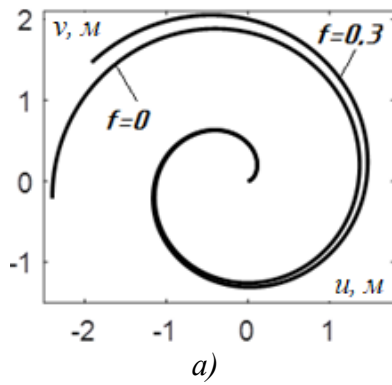


Рис. 25. Траєкторії ковзання частинки по площині, яка обертається із кутовою швидкістю $\omega=10 \text{ c}^{-1}$ при $r=0,2 \text{ м}$: а) площина горизонтальна ($\beta=0^\circ$); б) площина вертикальна ($\beta=90^\circ$)

У розглянутій задачі траєкторією переносного руху тригранника є коло, тобто рух тригранника Френе є обертальним навколо нерухомої осі. Застосування тригранника Френе для траєкторії переносного руху змінної кривини дозволяє розширити клас задач на складний рух точки, при якому обертальний рух навколо нерухомої осі є частковим випадком. Це продемонстровано на русі тригранника по горизонтальній кривій C_e змінної кривини (рис. 26, а). При цьому вважається, що траєкторія переносного руху C_e є віссю дороги, по якій рухається вантажний автомобіль і кузов якого утворений ортами $\bar{\tau}$ і $\bar{n}$ (на рис. 26, а позначено сірим кольором).

У кузові автомобіля розміщений вантаж, прийнятий за частинку B . Автомобіль рухається зі сталою швидкістю V_e . Система диференціальних рівнянь ковзання частинки має вигляд:

$$\begin{aligned} V_e^2(\rho_\tau'' - k'\rho_n - k^2\rho_\tau - 2k\rho_n') &= -fg \cdot \frac{\rho_\tau'}{\sqrt{\rho_\tau'^2 + \rho_n'^2}}; \\ V_e^2(\rho_n'' + k + k'\rho_\tau - k^2\rho_n + 2k\rho') &= -fg \cdot \frac{\rho_n'}{\sqrt{\rho_\tau'^2 + \rho_n'^2}}, \end{aligned} \quad (51)$$

де ρ_τ, ρ_n – залежності змінної s , що описують траєкторію ковзання в системі тригранника. Для розв'язання системи (51) потрібно задати натуральне рівняння кривої C_e . У роботі розглянуто приклад для $k=2a/(a^2+s^2)$, де a – стала величина. При русі автомобіля в певний момент часу (при певному значенні довжини дуги s траєкторії C_e) вантаж починає ковзати в кузові, а потім зупиняється. Це відображено на графіку швидкості ковзання (рис. 26, б).

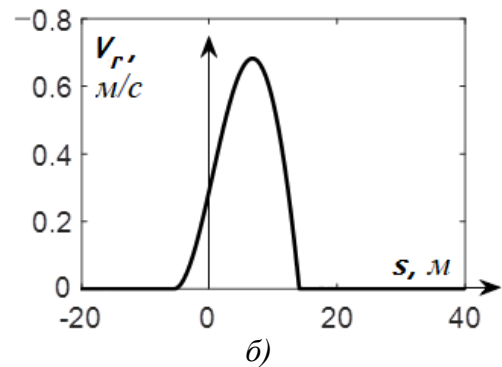
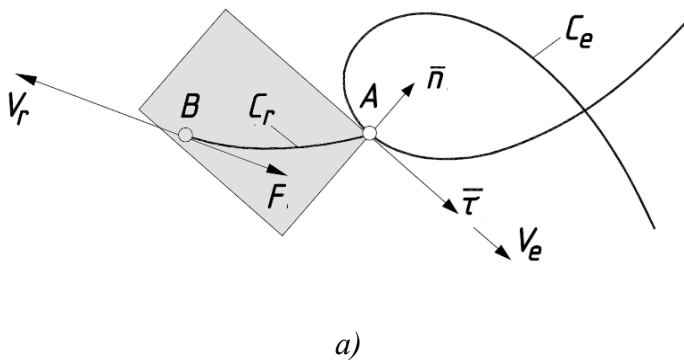


Рис. 26. Графічні ілюстрації до руху автомобіля з вантажем у кузові, що зафарбований у сірий колір: а) траєкторія C_e руху автомобіля з траєкторією C_r ковзання вантажу; б) графік швидкості ковзання вантажу

На рис. 27, а в масштабі побудована напрямна крива C_e , на якій потовщеною лінією виділено ділянку, при русі по якій стичної площини тригранника (тобто днища кузова автомобіля) відбувалося ковзання вантажу. Швидкість руху автомобіля $V_e=5 \text{ м/с}$, $a=15$, $f=0,3$. Сам кузов у збільшеному масштабі показаний на рис. 27, б, на якому побудовано траєкторію C_r ковзання вантажу. З нього видно, що вантаж у кузові змістився приблизно на $1,5 \text{ м}$ в сторону протилежного борта і приблизно на $0,25 \text{ м}$ в сторону, протилежну напрямку руху.

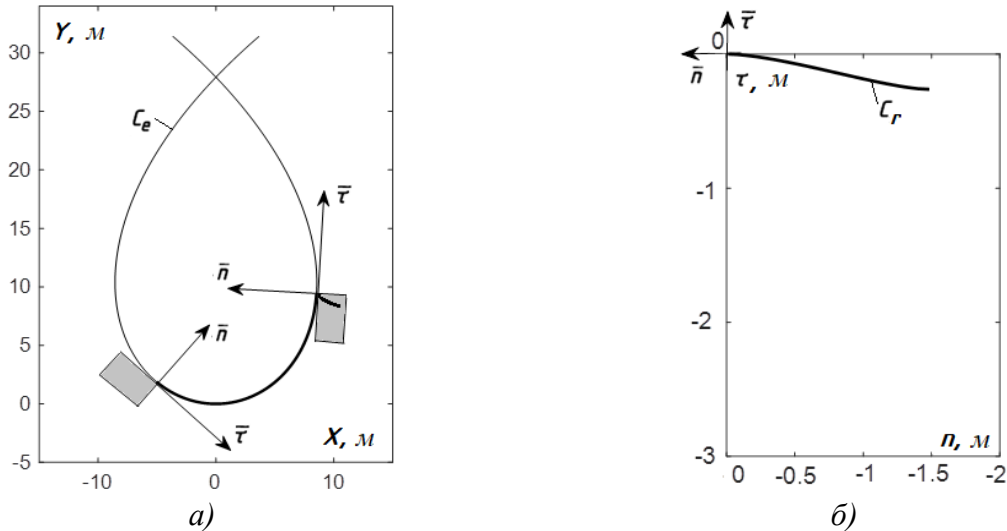


Рис. 27. Графічні ілюстрації до руху автомобіля з вантажем у кузові: а) траєкторія C_e руху автомобіля з його положенням на початку ковзання вантажу і після припинення ковзання; б) траєкторія C_r ковзання вантажу

Застосування тригранника Френе розглянуто для випадків, коли траєкторія відносного руху частинки відома, але невідома швидкість ковзання. Це можуть бути апарати відцентрової дії із встановленими вертикальними лопатками (рис. 28, а). При обертанні конуса тригранник Френе рухається по напрямному колу, а частинка буде ковзати вздовж спільної лінії – його твірної і лопатки. Отже, траєкторія ковзання відома – це є пряма лінія, розташована у спрямній площині тригранника.

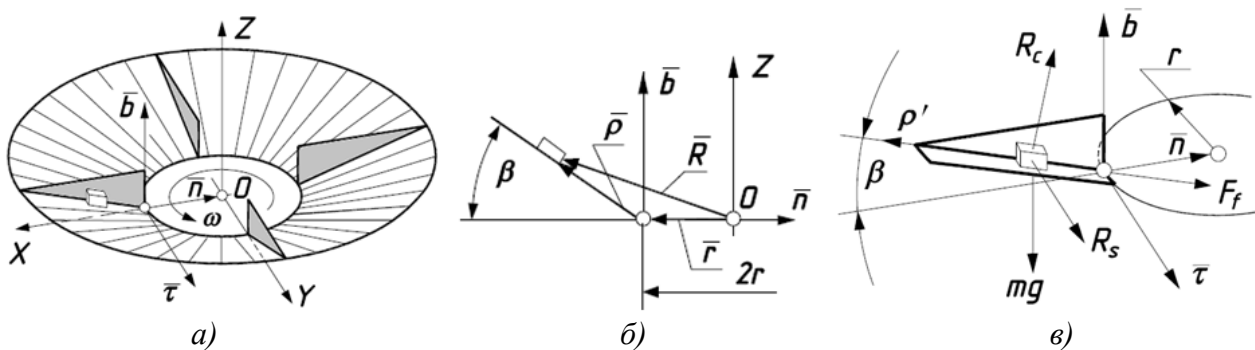


Рис. 28. Графічні ілюстрації до складання диференціальних рівнянь руху частинки в системі тригранника Френе: а) схематичне зображення конструкції апарату з частинкою на ньому; б) схема до складання векторного рівняння положення частинки; в) фрагмент конуса і лопатки і прикладені до частинки сили

Система рівнянь зводиться до диференціального рівняння другого порядку, яке розв'язується і має наступний вигляд:

$$\rho = c_1 e^{(A-f)ks \cos \beta} + c_2 e^{-(A+f)ks \cos \beta} + \frac{fg - kV_e^2 + (g + f k V_e^2) \operatorname{tg} \beta}{k^2 V_e^2 (\cos \beta - f \sin \beta)}, \quad (52)$$

де $A = \sqrt{1 + f^2 - 2f \operatorname{tg} \beta}$, $V_e = \omega \cdot r$, $k=1/r$, f – коефіцієнт тертя, однаковий для конуса і лопатки, c_1, c_2 – сталі інтегрування.

Швидкість ковзання частинки вздовж лопатки визначається диференціюванням шляху (52) по часу t : $V_r = d\rho/dt = (d\rho/ds)(ds/dt) = V_e(d\rho/ds) = V_e \rho'$. Сталі c_1 і c_2 інтегрування знаходяться за умови, що при $s=0$ пройдений шлях $\rho=0$ і початкова швидкість ковзання $\rho'=0$. Геометрична сума швидкостей переносного і відносного руху дає абсолютну швидкість:

$$V_a = V_e \sqrt{(1 + \rho k \cos \beta)^2 + \rho'^2}. \quad (53)$$

Отриманих залежностей достатньо, щоб розрахувати як відносну, так і абсолютну швидкість в момент сходу частинки із розсіювального апарата.

Ще один приклад – гвинтовий конвеєр із вертикальною віссю, у якому частинка ковзає по гвинтовій лінії – периферії шнека. Після складання диференціальних рівнянь ковзання частинки в проекціях на орти тригранника було отримано наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\alpha'' = \frac{\cos \beta [f_s(r_0 \alpha' - 1)^2 (1 - 2r_0 \alpha' + \cos 2\beta - f_p \sin 2\beta)]}{2r_0^2 \sqrt{(1 - 2r_0 \alpha') \cos^2 \beta + r_0^2 \alpha'^2} - \frac{g \cos \beta}{r_0 V_e^2} (\sin \beta + f_p \cos \beta)}; \quad (54)$$

$$R_p = m \cos \beta \left[g + \frac{V_e^2 f_s \sin \beta (r_0 \alpha' - 1)^2}{r_0 \sqrt{(1 - 2r_0 \alpha') \cos^2 \beta + r_0^2 \alpha'^2}} \right]; \quad (55)$$

$$R_s = \frac{m V_e^2}{r_0} (r_0 \alpha' - 1)^2. \quad (56)$$

Отримані рівняння (54) – (56) відповідають рівнянням (30) – (32) при $\varphi=0$, тобто для вертикального конвеєра. Вони відрізняються між собою, оскільки складені в проекціях на різні системи (рухому тригранника Френе і нерухому декартову). Однак вирази для знаходження граничної кутової швидкості обертання шнека, при якій можливий підйом частинки, швидкість її підйому після стабілізації руху повністю збігаються.

Впровадження результатів роботи здійснено: у проектування решіт скальпелятора для первинного очищення зернового матеріалу від дрібних домішок в ТОВ «Авіс Зернотрейд» с. Біловоди Роменського району Сумської області; у конструювання робочого органу автоматизованого пробовідбірника зернових та олійних культур для відбору зразків з автотранспорту для лабораторного випробування в ТОВ «Зернова Індустрія» смт Низи Сумського району Сумської області; в обґрунтування конструкції та режимів роботи транспортеру в'язучого бетонної суміші (портландцементу) до дозаторів автоматизованого бетонно-розчинного вузла цеху з виробництва залізобетонних виробів та багатопустотних плит перекриття в ТОВ «НОТЕХС» м. Суми; у конструювання робочого органу для розкидання сипучих матеріалів в ФГ Шепіль Я. А. с. Сула Сумського району Сумської області; у проектування відцентрового дискового розсіювача мінеральних добрив в ФГ Лісянський М. В. с. Мартинці Лебединського району Сумської області; у навчальний процес Національного університету біоресурсів і природокористування України при викладанні дисципліни «Дороги внутрішньогосподарського призначення» в розділі «Проектування автомобільних доріг» підготовки фахівців освітнього ступеня «Магістр» спеціальності 275 «Транспортні технології (на автомобільному транспорті)», у дипломне проектування фахівців освітнього ступеня «Магістр», у роботу наукових гуртків кафедри будівництва, а також при викладанні дисциплін «Нарисна геометрія та інженерна графіка», «Комп'ютери та комп'ютерні технології» підготовки фахівців освітнього ступеня «Бакалавр» спеціальності 192 «Будівництво та цивільна інженерія»; у навчальний процес Сумського національного аграрного університету при викладанні дисципліни «Інженерні мережі і конструкції в АПК» в розділі «Промислові будівлі в АПК» підготовки фахівців освітнього ступеня «Магістр» спеціальності 208 «Агроінженерія».

ВИСНОВКИ

У дисертації здійснено теоретичне узагальнення і подальший розвиток геометро-кінематичних методів визначення параметрів руху частинок по поверхнях під дією прикладених сил. Основним результатом є вирішення науково-технічної проблеми розроблення нових підходів до розв'язання таких задач із поєднанням методів класичної механіки і диференціальної геометрії поверхонь.

1. Проаналізовано основні підходи до складання диференціальних рівнянь руху точки по рухомих і нерухомих поверхнях. З'ясовано, що при цьому не існує єдиного підходу і задачі розв'язуються для конкретних типів поверхонь, причому часто використовується циліндрична система координат, в якій зручно описувати рух частинок по гвинтових і поверхнях обертання. При цьому рівняння складаються за умови, що рух по них стабілізувався, тобто вони не описують перехідного процесу. Сама поверхня описується спрощено, часто не наводяться її параметричні рівняння, які мають вирішальне значення для складання диференціальних рівнянь руху. Отримані результати відображаються у вигляді різноманітних графіків без якісної візуалізації самих поверхонь і траєкторій ковзання частинки по них.

Запропоновано відносити поверхню до внутрішніх координат, що дозволяє описати абсолютну траєкторію руху частинки додаванням її відносного (залежність двох криволінійних координат від третьої незалежної змінної) і переносного (переміщення поверхні відносно нерухомої системи координат) рухів. Ще один підхід – використання в ролі рухомої системи координат супровідного тригранника Френе. Тоді складові абсолютного прискорення визначаються за формулами Френе в проекціях на його орти.

2. Виведено узагальнені диференціальні рівняння руху частинки по нерухомій гвинтовій поверхні. Отримано часткові розв'язки для косоного закритого гелікоїда та поверхонь з жолобами у вигляді півкола та синусоїди. Встановлено особливості руху частинки в залежності від конструктивних параметрів жолоба і кута підйому нижньої гвинтової лінії. Отримано результат для жолоба, у якого кут підйому нижньої гвинтової лінії дорівнює куту тертя. У такому випадку початкова швидкість частинки буде зменшуватися, асимптотично наближаючись до нуля, а сама вона буде рухатися нескінченно довго.

3. Досліджено відносний рух частинки по поверхнях, які здійснюють коливальний рух таким чином, що всі їх точки описують кола у горизонтальних площинах. Такими поверхнями є циліндрична із горизонтальним розташуванням прямолінійних твірних, поперечним перерізом якої є синусоїда, та зовнішня поверхня колового циліндра із горизонтальною і нахилоною віссю. Знайдено умови відриву частинки від поверхні. Для колового циліндра із нахилоною віссю частинки з різним коефіцієнтом тертя рухаються по різних траєкторіях, причому відстань між ними збільшується по мірі ковзання по поверхні, що може бути використано для сепарації матеріалу.

4. Виведено диференціальні рівняння руху частинки всередині похилого колового циліндра, який обертається навколо власної осі, з урахуванням залежності кута нахилу його осі від кута тертя, включаючи горизонтальне розташування. Встановлено особливості траєкторій ковзання частинки та умову її «залипання».

Виведено та розв'язано диференціальні рівняння ковзання частинки по поверхнях обертання, які обертаються навколо власної вертикальної осі: зовнішній поверхні конуса; внутрішній поверхні, меридіаном якої є віддалена від осі обертання вітка параболи; внутрішній поверхні сферичного сегмента без і за наявності вертикальних лопаток. За результатами досліджень отримано три патенти України на корисну модель для розсіювальних апаратів відцентрової дії.

5. Встановлено умови транспортування частинки вгору гвинтовим коноїдом, з'єднаним з циліндричним кожухом, які обертаються навколо спільної вертикальної осі: 1) кут підйому гвинтової лінії кріплення коноїда до кожуха повинен бути більший кута тертя;

2) кутова швидкість обертання конструкції повинна бути більшою за кутову швидкість обертання частинки при її спуску по нерухомих поверхнях.

Виведено узагальнену систему диференціальних рівнянь транспортування частинки цими ж поверхнями, але при нерухомому циліндричному кожусі, тобто гвинтовим конвеєром. З'ясована принципова відмінність процесу транспортування частинки вертикальним, горизонтальним і похилим гвинтовим конвеєром. Для похилого розташування осі встановлено кут її нахилу і кутову швидкість обертання шнека, коли відбувається якісна зміна форми абсолютної траєкторії. Встановлено умови транспортування частинки вгору або вниз.

6. Запропоновано використання тригранника Френе при простому русі частинок по нерухомій поверхні. Тригранник з частинкою у його вершині описує траєкторію на поверхні. Виведено диференціальні рівняння у функції довжини траєкторії в проекціях на орти тригранника. Прикладом запропонованого підходу є конструювання криволінійної осі силосопроводу для транспортування подрібненої маси без залипання.

7. Запропоновано використання тригранника Френе при складному русі частинки по рухомій поверхні із переходом до руху тригранника вздовж кривої змінної кривини. Такий підхід дав змогу розширити коло задач, тобто перейти від обертального руху поверхні, коли вершина тригранника описує коло, до руху, коли тригранник рухається вздовж заданої кривої змінної кривини.

Для обертального руху розв'язано задачі відносного руху частинки по похилій площині, по внутрішній поверхні конуса із вертикальними лопатками, а також транспортування частинки гвинтовим конвеєром із вертикальною віссю. В останньому випадку отримано формулу граничної величини кутової швидкості обертання шнека, коли підйом частинки стає неможливим. Вона повністю збігається із аналогічною формулою, отриманою в розділі 3 іншим шляхом. Для шнека із конструктивними параметрами $r_0 = 0,1$ м і $\beta = 30^\circ$ було знайдено мінімальне значення кутової швидкості при відомих коефіцієнтах тертя $f_R = f = 0,3$; $\omega = 18,6$ с⁻¹. Максимально можливе значення кута β для розглянутого випадку становить 46° . Дослідження показали, що найбільша швидкість підйому частинки відбувається при кутові підйому β , рівному половині максимального значення, тобто в розглянутому випадку при $\beta = 23^\circ$.

8. Результати досліджень щодо вдосконалення робочих органів, які взаємодіють із частинками технологічного матеріалу, передані в ряд зацікавлених підприємств, про що свідчать відповідні акти, а також впроваджені у навчальний процес кафедри нарисної геометрії, комп'ютерної графіки та дизайну і кафедри будівництва Національного університету біоресурсів і природокористування України та у навчальний процес кафедри проєктування технічних систем Сумського національного аграрного університету.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

**Статті у періодичних наукових виданнях,
включених до категорії «А» Переліку наукових фахових видань України
та/або в закордонних виданнях, проіндексованих у базах даних
Web of Science Core Collection та/або Scopus**

1. Pylypaka S., Klendiy M., **Zaharova T. (Volina T.)** Movement of the particle on the external surface of the cylinder, which makes the translational oscillations in horizontal planes. *Advances in Design, Simulation and Manufacturing. The Innovation Exchange: International Conference on Design, Simulation, Manufacturing*, Sumy, Ukraine, 12–15 June 2018: Conference paper. Sumy, Ukraine, 2018. P. 336–345. *(Здобувачкою розглянуто окремий випадок коливань циліндра, коли його вісь нахилена під кутом тертя до горизонтальної площини).*

2. Pylypaka S., Nesvidomin V., **Zaharova T. (Volina T.)**, Pavlenko O., Klendiy M. The investigation of particle movement on a helical surface. *The Innovation Exchange: 2nd International Conference on Design, Simulation, Manufacturing*, Lutsk, Ukraine, 11–14 June 2019: Conference paper. Lutsk, Ukraine, 2019. P. 671–681. *(Здобувачкою досліджено рух частинки для випадку, коли кут підйому нижньої гвинтової лінії жолоба дорівнює кутові тертя).*

3. Pylypaka S., **Zaharova T. (Volina T.)**, Zalevska O., Kozlov D., Podliniaieva O. Determination of the effort for flexible strip pushing on the surface of a horizontal cylinder. Advanced Manufacturing Processes: International Conference, Odessa, Ukraine, 10–13 September 2019: Conference paper. Odessa, Ukraine, 2019. P. 582–590. *(Здобувачкою отримано вираз результуючої сили тиску смуги на внутрішню поверхню циліндра).*

4. Pylypaka S., Nesvidomin V., **Volina T.**, Sirykh L., Ivashyna L. Movement of the particle on the internal surface of the spherical segment rotating about a vertical axis. INMATEH – Agricultural Engineering. 2020. Vol. 62. No. 3. P. 79–86. *(Здобувачкою складено диференціальні рівняння відносного руху частинки по поверхні сферичного сегмента).*

5. Pylypaka S., **Volina T.**, Mukvich M., Efremova G., Kozlova O. Gravitational relief with spiral gutters, formed by the screw movement of the sinusoid. The Innovation Exchange: 3rd International Conference on Design, Simulation, Manufacturing, Kharkiv, Ukraine, 09–12 June 2020: Conference paper. Kharkiv, Ukraine, 2020. P. 63–73. *(Здобувачкою досліджено вплив параметрів синусоїди на характер руху частинки по гвинтовій поверхні).*

6. **Volina T.**, Pylypaka S., Rebrii A., Pavlenko O., Kremets Ya. Particle movement on concave coulters of the centrifugal distributor with radially installed vertical blades. Advanced Manufacturing Processes: 2nd Grabchenko's International Conference, Odessa, Ukraine, 08–11 September 2020: Conference paper. Odessa, Ukraine, 2020. P. 237–246. *(Здобувачкою визначено вплив коефіцієнта тертя частинки по диску і по лопаті на її розгін до моменту сходження із диска).*

7. Pylypaka S., **Volina T.**, Hryshchenko I., Rybenko I., Sydorenko N. Dynamics of a particle on a movable wavy surface. Advanced Manufacturing Processes: 2nd Grabchenko's International Conference, Odessa, Ukraine, 08–11 September 2020: Conference paper. Odessa, Ukraine, 2020. P. 196–206. *(Здобувачкою знайдено умови, за яких траєкторія ковзання частинки по поверхні є замкнутою кривою).*

8. Pylypaka S., **Volina T.**, Nesvidomin A., Zakharova I., Rebrii A. Particle movement in a centrifugal device with vertical blades. The Innovation Exchange: 4th International Conference on Design, Simulation, Manufacturing, Lviv, Ukraine, 8–11 June 2021: Conference paper. Lviv, Ukraine, 2021. P. 156–165. *(Здобувачкою знайдено вирази компонентів абсолютного прискорення частинки в проекціях на орти рухомого тригранника Френе).*

9. **Volina T.**, Pylypaka S., Pavlenko O., Klochko O., Hryshchenko I. The transportation of a particle by a vertical auger with a coaxial cylinder which rotate together around the common axis. Actual Problems of Engineering Mechanics: 8th International Scientific Conference, Odesa, Ukraine, 11–14 May 2021: Conference paper. Odesa, Ukraine, 2021. Article number 1164. *(Здобувачкою знайдено умови, за яких частинка при русі по спільній лінії перетину шнека і циліндра піднімається вгору або опускається вниз).*

10. **Volina T.**, Pylypaka S., Nesvidomin V., Pavlov A., Dranovska S. The possibility to apply the Frenet trihedron and formulas for the complex movement of a point on a plane with the predefined plane displacement. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2021. Vol. 3. No. 7 (111). P. 45–50. *(Здобувачкою знайдено вирази абсолютного прискорення частинки в проекціях на орти тригранника Френе при його русі вздовж кривої змінної кривини).*

11. **Volina T.**, Pylypaka S., Nesvidomin V., Rybenko I., Sierykh L. Particle movement on the external surface of the cone that rotates around the vertical axis. Advanced Manufacturing Processes: 3rd Grabchenko's International Conference, Odessa, Ukraine, 07–10 September 2021: Conference paper. Odessa, Ukraine, 2021. P. 557–567. *(Здобувачкою розглянуто вплив висоти, з якої падає частинка на конус, на подальшу траєкторію її ковзання по його зовнішній поверхні).*

12. Pylypaka S., **Volina T.**, Zalevska O., Semirnenko S., Hryshchenko I. Movement of a particle on the inner surface with a preset meridian. Advanced Manufacturing Processes: 3rd Grabchenko's International Conference, Odessa, Ukraine, 07–10 September 2021: Conference paper. Odessa, Ukraine, 2021. P. 535–545. *(Здобувачкою досліджено випадок, коли частинка припиняє ковзати по поверхні, тобто «залипає»).*

13. **Volina T.**, Pylypaka S., Kremets Ya., Kozlova O., Rebrii A. Organization of transportation of a particle by an inclined cylinder rotating around the axis. The Innovation Exchange: 5th International Conference on Design, Simulation, Manufacturing, Poznan, Poland, 07–10 June 2022: Conference paper. Poznan, Poland, 2022. P. 55–65. *(Здобувачкою досліджено характер руху частинки по внутрішній поверхні похилого циліндра для випадку, коли кут нахилу його осі більший кута тертя).*

14. Pylypaka S., **Volina T.**, Hryshchenko I., Dieniezhnikov S., Rybenko I. Mathematical model of lifting particles of technological material by vertical auger. The Innovation Exchange: 5th International Conference on Design, Simulation, Manufacturing, Poznan, Poland, 07–10 June 2022: Conference paper. Poznan, Poland, 2022. P. 112–122. *(Здобувачкою визначено вплив коефіцієнта тертя частинки по поверхні шнека і по поверхні кожуха на швидкість підйому частинки).*

15. **Volina T.**, Pylypaka S., Babka V., Zalevska O., Rebrii A. Sliding of a particle on the horizontal plane under oscillating and rotary movements. Advanced Manufacturing Processes: 4th Grabchenko's International Conference, Odessa, Ukraine, 06–09 September 2022: Conference paper. Odessa, Ukraine, 2022. P. 506–514. *(Здобувачкою складено диференціальні рівняння відносного руху частинки).*

16. **Volina T. M.**, Pylypaka S. F., Babka V. M. Motion of a particle on an inclined plane rotating around a vertical axis. International Applied Mechanics. 2022. Vol. 58. P. 488–496. *(Здобувачкою досліджено характер зміни траєкторій ковзання частинки по похилій площині в залежності від кута її нахилу).*

17. **Volina T.**, Pylypaka S., Kozlova O., Rebrii A., Rybenko I. Design of the curvilinear axis of the silage pipeline. The Innovation Exchange: 6th International Conference on Design, Simulation, Manufacturing, High Tatras, Slovak Republic, 06–09 June 2023: Conference paper. High Tatras, Slovak Republic, 2023. P. 115–124. *(Здобувачкою розглянуто окремий випадок, коли віссю силосопроводу є дуга кола, показано, що в такому випадку диференціальне рівняння руху частинки має аналітичний розв'язок).*

18. **Volina T.**, Pylypaka S., Kalenyk M., Dieniezhnikov S., Nesvidomin V., Hryshchenko I., Lytvynenko Ya., Borodai A., Borodai D., Borodai Ya. Construction of mathematical model of particle movement by an inclined screw rotating in a fixed casing. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2023. Vol. 5. No. 7 (125). P. 60–69. *(Здобувачкою показано, що на відміну від горизонтального і вертикального розташування осі шнека, стабілізації руху частинки при його похилій осі не відбувається).*

19. **Volina T. M.**, Pylypaka S. F. Force required to move the flexible strip up surface of horizontal cylinder. Machinery and Energetics. 2021. Vol. 12. No. 1. P. 25–29. *(Здобувачкою визначено складову сили тертя від результуючої сили тиску смуги на поверхню циліндра).*

20. **Volina T. M.**, Pylypaka S. F. Investigation of particle movement on rotary spherical segment. Machinery and Energetics. 2021. Vol. 12. No. 2. P. 33–38. *(Здобувачкою складено диференціальні рівняння відносного руху частинки по поверхні сферичного сегмента).*

21. **Volina T. M.**, Pylypaka S. F., Babka V. M., Nesvidomin A. V. Construction of meridian for given movement of particle on surface which rotates around the vertical axis. Machinery and Energetics. 2021. Vol. 12. No. 3. P. 33–38. *(Здобувачкою запропоновано меридіан поверхні вважати невідомою кривою, яку потрібно знайти за заданим законом руху частинки, розглянуто окремий випадок, коли ним є горизонтальна пряма).*

22. **Volina T. M.**, Pylypaka S. F., Babka V. M. Movement of particle on inner surface with preset meridian, which rotates around vertical axis. Machinery and Energetics. 2021. Vol. 12. No. 4. P. 15–20. *(Здобувачкою запропоновано за меридіан поверхні взяти вітку параболи, зміщену на певну відстань від осі обертання, побудовано графік зміни швидкості ковзання частинки по такій поверхні).*

23. **Volina T.**, Nesvidomin V., Nesvidomin A., Babka V., Hryshchenko I. Movement of a particle along an inclined cylinder rotating around its axis. Machinery and Energetics. 2022.

Vol. 13. No. 2. P. 32–40. *(Здобувачкою побудовано абсолютні траєкторії руху частинки при різних кутових швидкостях обертання похилого циліндра).*

24. **Volina T.**, Pylypaka S., Nesvidomin V., Kalenyk M., Spirintsev D., Dieniezhnikov S., Hryshchenko I., Rebrii A., Herashchenko T., Soloshchenko V. Determining the shape of a flexible thread in the field of horizontal and vertical forces. Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2024. Vol. 2. No. 7 (128). P. 24–30. *(Здобувачкою математично показано, що формою гнучкої нитки є ланцюгова лінія незалежно від співвідношення вертикальних і горизонтальних розподілених сил).*

**Статті у наукових виданнях,
включених до Переліку наукових фахових видань України**

25. Захарова Т. М. (Воліна Т. М.) Геометричне конструювання робочої поверхні органу для розсіювання мінеральних добрив. Вісник Сумського національного аграрного університету. Серія: «Механізація та автоматизація виробничих процесів». 2018. № 10 (34). С. 38–40.

26. Воліна Т. М. Дослідження руху частинки по спіральному жолобу під дією сили власної ваги. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2020. Вип. 99. С. 65–78.

27. Воліна Т. М. Дослідження руху частинки по шорсткій поверхні, яка утворена гвинтовим рухом синусоїди, під дією сили власної ваги. Техніка та енергетика. 2020. Т. 11. № 3. С. 187–194.

28. **Воліна Т. М.**, Пилипака С. Ф. Дослідження руху частинки по зовнішній поверхні циліндра під час його поступальних коливань в горизонтальних площинах. Техніка та енергетика. 2020. Т. 11. № 4. Р. 101–105. *(Здобувачкою розглянуто окремий випадок ковзання частинки по поверхні циліндра, коли його вісь є горизонтальною).*

29. Воліна Т. М. Гвинтовий спуск, до аналітичного опису якого входить рівняння руху частинки по похилій площині. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2021. Вип. 100. С. 89–98.

30. **Воліна Т. М.**, Пилипака С. Ф., Несвідомін А. В. Рух частинки по сферичному сегменту з вертикальними радіально встановленими лопатками. Механіка та математичні методи. 2021. Т. 3. № 1. С. 27–36. *(Здобувачкою побудовано графіки зміни відносної і абсолютної швидкостей при розгоні частинки).*

31. Pylypaka S., **Volina T.**, Babka V. The motion of a particle on a wavy surface during its translational circular oscillations in horizontal planes. Proceedings of Odessa Polytechnic University. 2021. Iss. 1 (63). P. 44–52. *(Здобувачкою розглянуто окремий випадок коливань хвилястої поверхні, коли вона перетворюється у площину, знайдено вираз радіуса кривизни, які є траєкторіями ковзання частинки після стабілізації руху).*

32. **Volina T.**, Pylypaka S. Dependence of resistance of movement of the flexible strip on the surface from the curvature of its axis. Modern Problems of Modeling. 2021. Vol. 21. P. 66–73. *(Здобувачкою розкладено на дві складові, до яких входять геодезична і нормальна кривина траєкторії, силу для згинання смуги при її русі по просторовій кривій на внутрішній поверхні циліндра).*

33. Пилипака С. Ф., **Воліна Т. Н.**, Бабка В. М., Грищенко І. Ю. Рух частинки по зовнішній шорсткій поверхні конуса, який обертається навколо вертикальної осі. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2021. Вип. 101. С. 181–194. *(Здобувачкою досліджено вплив кута нахилу прямолінійних твірних конуса на траєкторію ковзання частинок по ньому).*

34. **Воліна Т.**, Пилипака С. Дослідження руху частинки у відцентровому апараті з вертикальними лопатками за допомогою рухомої системи координат. Сучасні проблеми моделювання. 2022. Вип. 23. С. 55–64. *(Здобувачкою складено рівняння руху частинки у векторному вигляді і розписано його в проєкціях на орти тригранника Френе).*

35. Пилипака С. Ф., **Воліна Т. М.**, Несвідомін А. В., Бабка В. М., Грищенко І. Ю. Рух частинки по горизонтальному циліндру, що обертається навколо власної осі. Вісник

Сумського національного аграрного університету. Серія: «Механізація та автоматизація виробничих процесів». 2022. № 1 (47). С. 30–35. *(Здобувачкою знайдено умову, за якої частинка може залишатися на поверхні циліндра нерухомою в абсолютному русі).*

36. Пилипака С. Ф., **Воліна Т. М.**, Несвідомін А. В., Бабка В. М., Шуляк І. С. Транспортування матеріальної частинки вертикальним шнеком. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2022. Вип. 102. С. 165–180. *(Здобувачкою знайдено граничне значення кута підйому гвинтової лінії – периферії шнека, при якому припиняється підйом частинки при заданій кутовій швидкості обертання шнека).*

37. Пилипака С. Ф., Несвідомін В. М., **Воліна Т. М.**, Бабка В. М., Грищенко І. Ю. Ковзання частинки по рухомій горизонтальній площині. Сучасні проблеми моделювання. 2022. Вип. 24. С. 147–155. *(Здобувачкою за результатами чисельного інтегрування диференціальних рівнянь побудовано відносну і абсолютну траєкторії руху частинки).*

38. Пилипака С. Ф., **Воліна Т. М.**, Захарова І. О. Переміщення частинки по обертовому рухомому вертикальному шнеку, обмеженому кожухом. Управління розвитком складних систем. 2022. Вип. 50. С. 115–121. *(Здобувачкою з'ясовано, за яких умов можливе переміщення частинки як вгору, так і вниз).*

39. Пилипака С. Ф., **Воліна Т. М.**, Захарова І. О., Рибенко І. О., Ребрій А. М. Дослідження складного руху точки по площині із застосуванням тригранника і формул Френе. Прикладна геометрія та інженерна графіка. 2023. Вип. 104. С. 171–182. *(Здобувачкою знайдено складові абсолютного прискорення частинки в проекціях на орти супровідного тригранника Френе криволінійної траєкторії його руху).*

40. **Volina T.**, Nesvidomin V., Babka V., Hryshchenko I. Y., Kremets Ya. S. Curve axis of a silo pipeline for transportation of a crushed material. Bulletin of Sumy National Agrarian University. The Series: Mechanization and Automation of Production Processes. 2023. Vol. 53. No. 3. P. 20–25. *(Здобувачкою розглянуто частковий випадок, коли криволінійною віссю силосопроводу є дуга кола).*

Патенти України на корисну модель

41. Пилипака С. Ф., **Захарова Т. М. (Воліна Т. М.)**, Чепіжний А. В., Плавинська О. В. Патент України на корисну модель № 111952. МПК А01С 17/00. Робочий орган для розсіювання мінеральних добрив. Сумський національний аграрний університет. № u201606109; заявлено від 06.06.2016; опубліковано 25.11.2016; Бюлетень № 22/2016. *(Здобувачкою обґрунтовано формулу винаходу).*

42. Пилипака С. Ф., **Захарова Т. М. (Воліна Т. М.)**, Чепіжний А. В., Захарова І. О., Плавинська О. В. Патент України на корисну модель № 133601. МПК А01С 17/00. Робочий орган для розсіювання мінеральних добрив. Патентовласники С. Ф. Пилипака, Т. М. Захарова (Т. М. Воліна), А. В. Чепіжний, І. О. Захарова, О. В. Плавинська. № u201811842; заявлено від 30.11.2018; опубліковано 10.04.2019; Бюлетень № 7/2019. *(Здобувачкою обґрунтовано формулу винаходу).*

43. Пилипака С. Ф., **Захарова Т. М. (Воліна Т. М.)**, Чепіжний А. В., Захарова І. О., Плавинська О. В. Патент України на корисну модель № 133602. МПК А01С 17/00. Робочий орган для розкидання сипучих матеріалів. Патентовласники С. Ф. Пилипака, **Т. М. Захарова (Т. М. Воліна)**, А. В. Чепіжний, І. О. Захарова, О. В. Плавинська. № u201811843; заявлено від 30.11.2018; опубліковано 10.04.2019; Бюлетень № 7/2019. *(Здобувачкою обґрунтовано формулу винаходу).*

Тези наукових доповідей

44. Захарова Т. М. (Воліна Т. М.) Обґрунтування конструкції робочого органу для розкидання мінеральних добрив. Обуховські читання: XI Міжнародна науково-практична конференція, м. Київ, 01 березня 2016 року: тези доповіді. Київ, 2016. С. 50–52.

45. **Захарова Т. М. (Воліна Т. М.)**, Кремець Т. С. Конструювання плоских кривих у натуральній параметризації за допомогою годографа Піфагора. Сучасні проблеми

геометричного моделювання: 19 Міжнародна науково-практична конференція, м. Мелітополь, 06–09 червня 2017 року: тези доповіді. Мелітополь, 2017. С. 14. *(Здобувачкою запропоновано застосування годографа Піфагора для конструювання плоских кривих у натуральній параметризації)*.

46. Захарова Т. М. (Воліна Т. М.) Диференціальні рівняння відносного переміщення частинки по зовнішній поверхні похилого циліндра, який здійснює коливальний рух. Технології XXI сторіччя: 24 Міжнародна науково-практична конференція, м. Суми, 10–15 вересня 2018 року: тези доповіді. Суми, 2018. Ч. 1. С. 18–20.

47. Захарова Т. М. (Воліна Т. М.) Рух частинки по зовнішній поверхні циліндра, який здійснює поступальні коливання в горизонтальних площинах. Технології XXI сторіччя: 24 Міжнародна науково-практична конференція, м. Суми, 10–15 вересня 2018 року: тези доповіді. Суми, 2018. Ч. 1. С. 38–39.

48. Захарова Т. М. (Воліна Т. М.) Вплив коефіцієнту тертя на рух частинки по зовнішній поверхні циліндра, який здійснює поступальні коливання в горизонтальних площинах. Технології XXI сторіччя: 24 Міжнародна науково-практична конференція, м. Суми, 10–15 вересня 2018 року: тези доповіді. Суми, 2018. Ч. 1. С. 44–45.

49. Захарова Т. М. (Воліна Т. М.) Рух частинки по зовнішній поверхні циліндра, який здійснює поступальні коливання в горизонтальних площинах. Prospects for the development of technical sciences in EU countries and Ukraine: International scientific and practical conference, Wloclawek, Republic of Poland, December 21–22, 2018: theses of the report. Wloclawek, 2018. P. 163–168.

50. Пилипака С. Ф., Муквич М. М., **Захарова Т. М. (Воліна Т. М.)** Аналітичний опис ізотропних ліній на поверхні уявного гіперболоїда та побудова мінімальних поверхонь. Сучасні проблеми геометричного моделювання: 21 Міжнародна науково-практична конференція, м. Мелітополь, 04–07 червня 2019 року: тези доповіді. Мелітополь, 2019. С. 23. *(Здобувачкою запропоновано аналітичний опис уявного гіперболоїда за допомогою комплексної змінної)*.

51. Pylypaka S., Nesvidomin V., **Zaharova T. (Volina T.)**, Pavlenko O., Klendiy M. The investigation of particle movement on a helical surface. Design, simulation, manufacturing: the innovation exchange: 2nd international conference, Sumy, June 11–14, 2019: theses of the report. Sumy, 2019. P. 127. *(Здобувачкою досліджено рух частинки для випадку, коли кут підйому нижньої гвинтової лінії жолоба є більшим за кут тертя)*.

52. Pylypaka S., **Zaharova T. (Volina T.)**, Zalevska O., Kozlov D., Podliniaieva O. The determination of the effort for pushing the flexible strip upon the surface of a horizontal cylinder. Advanced manufacturing processes: Grabchenko's international conference on advanced manufacturing processes, Odessa, September 10–13, 2019: theses of the report. Odessa, 2019. P. 95. *(Здобувачкою складено диференціальне рівняння руху гнучкої нестискуваної стрічки з прямокутним перерізом по внутрішній поверхні горизонтального циліндра)*.

53. Пилипака С. Ф., **Воліна Т. М.**, Кресан Т. А., Захаров М. М., Ребрій А. М. Визначення зусилля для штовхання гнучкої стрічки вгору по поверхні горизонтального циліндра. Technical sciences: history, the present time, the future, EU experience: International scientific and practical conference, Wloclawek, Republic of Poland, September 27–28, 2019: theses of the report. Wloclawek, 2019. P. 136–140. *(Здобувачкою отримано формули для визначення необхідної потужності для забезпечення заданої швидкості пересування гнучкої стрічки вгору по поверхні горизонтального циліндра)*.

54. Пилипака С. Ф., **Воліна Т. М.**, Залевська О. В., Захарова І. О., Рибенко І. О. Обґрунтування конструкції робочого органу для розкидання мінеральних добрив. Technical sciences: history, the present time, the future, EU experience: International scientific and practical conference, Wloclawek, Republic of Poland, September 27–28, 2019: theses of the report. Wloclawek, 2019. P. 133–135. *(Здобувачкою отримано формулу для визначення необхідного радіуса сфери в залежності від діаметра диска та кута сходу частинок з нього)*.

55. Pylypaka S., **Volina T.**, Mukvich M., Efremova G., Kozlova O. Gravitational relief with spiral gutters, formed by the screw movement of the sinusoid. Design, simulation, manufacturing: the innovation exchange: 3rd International conference, Kharkiv, June 09–12, 2020: theses of the report. Kharkiv, 2020. P. 120. *(Здобувачкою розв'язано диференціальні рівняння руху по шорсткій гвинтовій поверхні, утвореній гвинтовим рухом синусоїди, та побудовано траєкторії руху частинки).*

56. **Volina T.**, Pylypaka S., Rebrii A., Pavlenko O., Kremets Ya. Particle movement on concave coulters of the centrifugal distributor with radially installed vertical blades. Advanced manufacturing processes: 2nd Grabchenko's international conference on advanced manufacturing processes, Odessa, September 08–11, 2020: theses of the report. Odessa, 2020. P. 68. *(Здобувачкою складено систему диференціальних рівнянь руху частинки по відцентровому розсіювачу з радіально встановленими вертикальними лопатками).*

57. Pylypaka S., **Volina T.**, Hryshchenko I., Rybenko I., Sydorenko N. Dynamics of a particle on a movable wavy surface. Advanced manufacturing processes: 2nd Grabchenko's international conference on advanced manufacturing processes, Odessa, September 08–11, 2020: theses of the report. Odessa, 2020. P. 64. *(Здобувачем побудовано траєкторії ковзання частинки по циліндричній поверхні з синусоїдальним перерізом та графіки реакції поверхні).*

58. **Volina T.**, Pylypaka S., Nesvidomin V., Rybenko I., Sierykh L. Particle movement on the external surface of the cone that rotates around the vertical axis. Advanced manufacturing processes: 3rd Grabchenko's international conference on advanced manufacturing processes, Odessa, September 07–10, 2021: theses of the report. Odessa, 2021. P. 94. *(Здобувачкою складено та розв'язано чисельними методами диференціальні рівняння руху частинки по поверхні із урахуванням початкової швидкості частинки в момент контакту з поверхнею).*

59. Pylypaka S., **Volina T.**, Nesvidomin A., Zakharova I., Rebrii A. Particle movement in a centrifugal device with vertical blades. Design, simulation, manufacturing: the innovation exchange: 4th International conference, Lviv, June 08–11, 2021: theses of the report. Lviv, 2021. P. 132. *(Здобувачкою запропоновано використання тригранника Френе у ролі рухомої системи координат для дослідження руху частинки по поверхні відцентрового апарата з вертикальними лопатками).*

60. Pylypaka S., **Volina T.**, Zalevska O., Semirnenko S., Hryshchenko I. Movement of the particle on the inner surface with a preset meridian. Advanced manufacturing processes: 3rd Grabchenko's international conference on advanced manufacturing processes, Odessa, September 07–10, 2021: theses of the report. Odessa, 2021. P. 92. *(Здобувачкою побудовано графіки відносної і абсолютної швидкостей частинки та отримано аналітичні залежності, які дозволяють визначити вплив конструктивних параметрів поверхні на процес руху).*

61. Пилипака С. Ф., **Воліна Т. Н.** Транспортирование частицы вертикальным шнеком с соосным цилиндром, которые вращаются вокруг общей оси. Актуальні проблеми інженерної механіки: VIII Міжнародна науково-практична конференція, м. Одеса, 11–14 травня 2021 року: тези доповіді. Одеса, 2021. С. 330–332. *(Здобувачкою проведено якісний аналіз диференціальних рівнянь руху частинки по спільній лінії перетину вертикального шнека з циліндром, які обертаються навколо спільної осі).*

62. Пилипака С. Ф., **Воліна Т. М.** Транспортування частинки вертикальним шнеком із співвісним циліндром, що обертаються навколо власної осі. Обухівські читання: XVI Міжнародна науково-практична конференція, м. Київ, 30 березня 2021 року: тези доповіді. Київ, 2021. С. 7–8. *(Здобувачкою досліджено випадок, коли кут підйому гвинтової лінії, якою є периферія вертикального шнека, більший від кута тертя).*

63. **Воліна Т. М.**, Пилипака С. Ф. Дослідження залежності опору переміщення гнучкої смуги по поверхні від кривини її осі. Сучасні проблеми геометричного моделювання: 23 Міжнародна науково-практична конференція, м. Мелітополь, 01–04 червня 2021 року: тези доповіді. Мелітополь, 2021. С. 12–13. *(Здобувачкою отримано формулу для визначення зусилля, необхідного для подолання опору ковзання смуги).*

64. **Volina T. M.**, Pylypaka S. F., Kremets Ya. S., Kozlova O. G., Rebrii A. M. Organization of transportation of a particle by an inclined cylinder rotating around the axis. Design, simulation, manufacturing: the innovation exchange: 5th International conference, Poznan, Poland, June 7–10, 2022: theses of the report. Poznan, 2022. P. 120. *(Здобувачкою отримано диференціальні рівняння руху частинки в проекціях на осі нерухомої системи координат).*

65. Pylypaka S., **Volina T.**, Hryshchenko I., Dieniezhnikov S., Rybenko I. Mathematical model of lifting particles of technological material by vertical auger. Design, simulation, manufacturing: the innovation exchange: 5th International conference, Poznan, Poland, June 7–10, 2022: theses of the report. Poznan, Poland, 2022. P. 126. *(Здобувачкою побудовано графіки кінематичних характеристик руху частинки по вертикальному шнеку в співвісному кожусі).*

66. Воліна Т. М. Транспортування частинки рухомою хвилястою поверхнею. Прикладна геометрія, інженерна графіка та об'єкти інтелектуальної власності: XI Всеукраїнська науково-практична конференція, м. Київ, 23 червня 2022 року: тези доповіді. Київ, 2022. Вип. 11. С. 85–94.

67. **Volina T.**, Pylypaka S., Babka V., Zalevska O., Rebrii A. Sliding of a particle on the horizontal plane, which combines oscillating and rotary movements. Advanced manufacturing processes: 4th Grabchenko's international conference on advanced manufacturing processes, Odessa, September 6–9, 2022: theses of the report. Odessa, 2022. P. 87. *(Здобувачкою побудовано траєкторії відносного руху частинки по площині).*

68. Kresan T., Pylypaka S., **Volina T.**, Rybenko I., Tatsenko O. Non-circular wheels from a congruent arcs. Advanced manufacturing processes: 4th Grabchenko's international conference on advanced manufacturing processes, Odessa, September 6–9, 2022: theses of the report. Odessa, 2022. P. 39. *(Здобувачкою описано криві симетричних дуг, які перетинаються під прямим кутом, квадратичним поліномом в полярній системі координат).*

69. Воліна Т. М. Ковзання частинки по рухомій горизонтальній площині. Сучасні проблеми геометричного моделювання: 24 Міжнародна науково-практична конференція, м. Мелітополь, 08–09 вересня 2022 року: тези доповіді. Мелітополь, 2022. С. 8–9.

70. Воліна Т. М. Переміщення частинки по рухомій хвилястій поверхні. Обухівські читання: XVII Міжнародна науково-практична конференція, м. Київ, 30 березня 2023 року: тези доповіді. Київ, 2023. С. 13–15.

71. Воліна Т. М. Аналітичний опис руху частинки по зовнішній поверхні рухомого циліндра. Крамаровські читання: XI Міжнародна науково-технічна конференція, м. Київ, 22–23 лютого 2024 року: тези доповіді. Київ, 2024. С. 330–335.

АНОТАЦІЯ

Воліна Т. М. Геометро-кінематичні методи визначення параметрів руху частинок по поверхнях під дією прикладених сил. Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук зі спеціальності 05.01.01 «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Національний університет біоресурсів і природокористування. Київ, 2025.

Дисертацію присвячено розробленню геометро-кінематичних методів визначення параметрів руху частинок по поверхнях під дією прикладених сил.

Здобувачкою проаналізовано підходи до складання диференціальних рівнянь руху точки по рухомих і нерухомих поверхнях. У роботі запропоновано використовувати параметричні рівняння поверхні з віднесенням її до внутрішніх криволінійних координат. Функціональна залежність двох внутрішніх координат поверхні від незалежної змінної, за яку прийнято час, описує лінію на поверхні. Ця лінія приймається за траєкторію ковзання частинки, яку потрібно розшукати. Рух частинки по поверхні може бути простим, коли вона нерухома, або складним, коли рухома поверхня має елементи обертального руху. Складання диференціальних рівнянь руху здійснюється в проекціях на осі просторової системи координат. При складному русі такою системою може бути нерухома декартова система або рухома, в ролі якої використано тригранник Френе. Він є супровідним для траєкторії

переносного руху поверхні. Якщо траєкторія переносного руху задана у функції довжини власної дуги, то для знаходження вектора абсолютного прискорення використовуються відомі у диференціальній геометрії формули Френе. Такий підхід спрощує знаходження абсолютного прискорення в проекціях на орти тригранника.

Простий рух частинки розглянуто на прикладах гравітаційних спусків, в ролі яких виступають гвинтові поверхні. Складено узагальнені диференціальні рівняння руху частинки, у які закладено форму кривої осевого перерізу поверхні. Розглянуто також відносний рух частинки по різних поверхнях, які здійснюють коливальний рух.

Складний рух частинки розглянуто на прикладах циліндрів, конусів та інших поверхонь, які обертаються навколо власної осі. Окрему групу задач становить складний рух частинки, коли вона одночасно контактує з двома поверхнями. Це стосується відцентрових апаратів з радіально розташованими вертикальними лопатками, а також гвинтового конвеєра, який складається із нерухомого циліндричного кожуха, всередині якого обертається гвинтовий коноїд. Він може транспортувати сипкий матеріал як вгору, так і в горизонтальному напрямі в залежності від розташування його осі. Для обох цих випадків характер руху частинки суттєво відрізняється. Для його вивчення було складено узагальнені диференціальні рівняння руху частинки, в які було закладено кут нахилу осі конвеєра відносно горизонтальної площини. У результаті розв'язування диференціальних рівнянь чисельними методами було отримано і побудовано відносні і абсолютні траєкторії руху частинки при різних кутах нахилу конвеєра. Це дозволило отримати якісну оцінку зміни руху частинки при поступовому нахилі конвеєра від вертикального до горизонтального положення.

Ключові слова: частинка, поверхня, ковзання, складний рух, відносна і абсолютна траєкторії, диференціальні рівняння.

ANNOTATION

Volina T. M. Geometric-kinematic methods for determining the parameters of particle motion on surfaces under the action of applied forces. Qualifying scientific work on the rights of the manuscript.

The dissertation on competition for a scientific degree of doctor of technical sciences, specialty 05.01.01 «Applied Geometry, Engineering Graphics». National University of Life and Environmental Sciences of Ukraine. Kyiv, 2025.

The dissertation is dedicated to developing geometric-kinematic methods for determining the parameters of particle motion on surfaces under the action of applied forces.

The approaches to composing differential equations for the motion of a point on moving and stationary surfaces were analyzed. Parametric equations of the surface, relating it to internal curvilinear coordinates, are proposed. The functional dependence of two internal surface coordinates on an independent variable, which is assumed to be time, describes a line on the surface. This line is taken as the trajectory of particle sliding, which should be determined. The motion of a particle on a surface can be simple, when the surface is stationary or complex when the surface is moving and exhibits elements of rotational motion. The differential equations of motion are composed of projections onto the axes of the spatial coordinate system. In the case of complex motion, this system can be either a stationary Cartesian system or a moving system, represented by a Frenet trihedron, which accompanies the trajectory of the surface's transient motion. Suppose the trajectory of the transient motion is defined as a function of the length of its intrinsic arc. In that case, the known Frenet formulas from differential geometry are used to find the vector of absolute acceleration. This approach simplifies the determination of absolute acceleration in projections onto the orthogonal vectors of the Frenet trihedron.

Simple particle motion was considered using examples of gravitational descents, modeled by helical surfaces. Generalized differential equations of particle motion, incorporating the shape of the axial cross-sectional curve of the surface, are composed. The relative motion of a particle on different surfaces undergoing oscillatory motion was also considered.

Simple particle motion was considered using examples of gravitational descents, modelled by helical surfaces. A special group of problems involves complex particle motion when it simultaneously contacts two surfaces. This is relevant for centrifugal devices with radially installed vertical blades, as well as for a helical conveyor, which consists of a stationary cylindrical casing inside which a helical conoid rotates. The conveyor can transport bulk materials both upward and horizontally, depending on the orientation of its axis. In both cases, the nature of the particle's motion differs significantly. To study this, generalized differential equations of particle motion were composed, incorporating the angle of inclination of the conveyor's axis relative to the horizontal plane. As a result of solving the differential equations using numerical methods, the relative and absolute trajectories of particle motion were obtained and plotted for different conveyor inclination angles. This allowed for a qualitative assessment of the change in particle motion as the conveyor was gradually tilted from a vertical to a horizontal position.

Key words: particle, surface, sliding, complex motion, relative and absolute trajectories, differential equations.